Scienza delle Costruzioni

Esercizio 1

“Travatura reticolare iperstatica”

Carpentieri Gerardo

20/06/2009

1.1 Descrizione preliminare della struttura

1.2 Studio della struttura S’$_0$

1.3 Studio della struttura S’$_1$

1.4 Calcolo dell’incognita iperstatica e degli spostamenti nodali

1.1 Descrizione preliminare della struttura

È data una travatura reticolare iperstatica

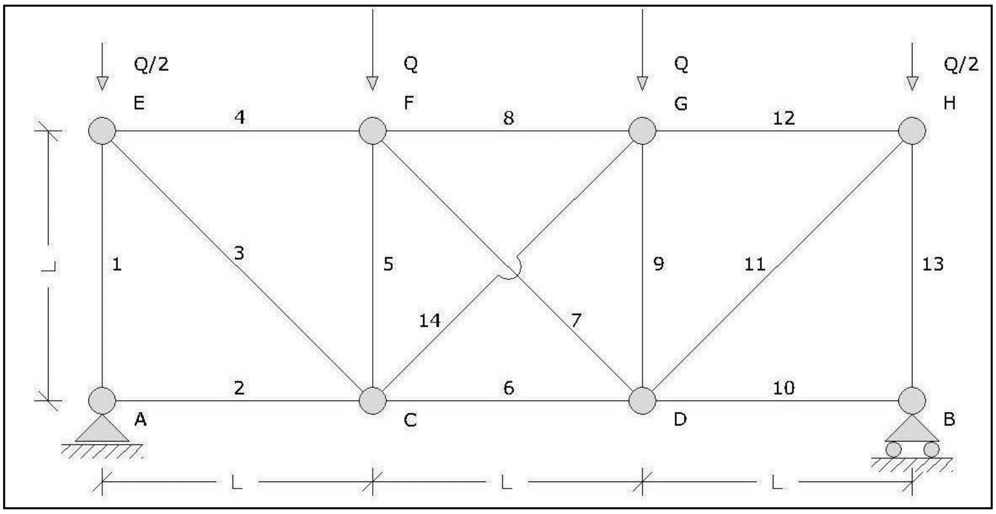

Figura 1 Struttura S

con aste aventi sezione di area A = $10^{-4}L^2$ e modulo di Young E. Calcolare con il metodo delle forze gli sforzi nelle aste e gli spostamenti dei nodi supponendo che sia Q = 10^{-4}EA.

In primo luogo si procede allo studio del grado di iperstaticità della struttura utilizzando la formula:

$$3t - s = l - i\ ,$$

dove:

- t è il numero di tronchi (14);
- s è la somma delle molteplicità dei vincoli esterni ed interni (43);
- l è il grado di labilità (0);
- i è il grado di iperstaticità (1).

In definitiva la struttura in Figura 1 risulta una volta iperstatica.

Nello spirito del metodo delle forze occorre individuare, tra le infinite soluzioni equilibrate, l'unica che risulta anche congruente.

Il modo più semplice è considerare lo schema isostatico principale nel quale è stata introdotta l'incognita iperstatica X, corrispondente allo sforzo normale dell'asta 14 (sistema S'). In seguito si considera lo schema S_0' sul quale agiscono le azioni esterne della struttura S e tutti i cedimenti e le distorsioni consentiti dai vincoli. Infine si analizza lo schema S_1' che contiene l'incognita iperstatica X posta ad un valore unitario.

Per la scrittura delle equazioni di congruenza in forma variazionale è possibile utilizzare il Principio dei Lavori Virtuali Complementare (PLVC), utilizzando come tensioni virtuali i soli sforzi normali delle aste nello schema S_1' e come deformazioni quelle della struttura S di partenza, che si ottengono utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti.
Siccome lo sforzo normale è costante nelle aste, gli integrali del PLVC diventano delle sommatorie su tutte le aste.
Il PLVC per un corpo continuo si scrive:

$$\int_C \delta T \cdot \varepsilon dv = -\int_C \delta T \cdot \varepsilon^* dv + \int_{\delta C} \delta T n \cdot u^* ds \quad , \quad \forall \delta T \ .$$

Dove:

- δT è il tensore di tensione virtuale;
- ε ed ε^* sono i tensori di deformazione elastica e delle distorsioni;
- u^* è il vettore dei cedimenti vincolari.

Si nota che, nel caso della travatura reticolare assegnata, il problema è semplificato perché alcuni degli sforzi normali nelle aste sono nulli e non ci sono distorsioni.

1.2 Studio della struttura S_0'

Lo schema della seguente figura risulta isostatico ed è possibile trovare le reazioni dei vincoli esterni dall'equazione di equilibrio alla traslazione verticale e da quella alla rotazione intorno alla cerniera in A.

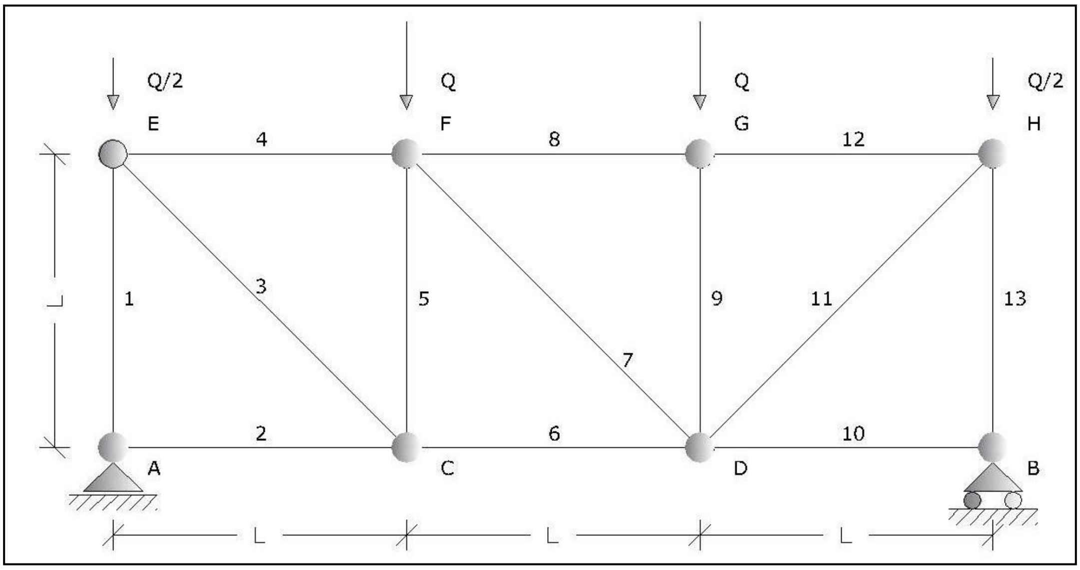

Figura 2 Struttura S_0'

$$3Q = R_{Ay} + R_{By} \qquad \rightarrow \qquad R_{Ay} = -R_{By} + 3Q = \frac{3}{2}Q;$$

$$QL + Q2L + \frac{Q}{2}3L = R_{By}3L \quad \rightarrow \quad \frac{9QL}{2} = R_{By}3L \quad \rightarrow \quad R_{By} = \frac{3}{2}Q.$$

Per il calcolo degli sforzi normali nei nodi è stato utilizzato il metodo dell'equilibrio ai nodi.

Nodo A

$$N_2^0 = 0$$

$$N_1^0 = R_{Ay} = \frac{3}{2}Q$$

Nodo E

$$N_1^0 + N_3^0\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Q}{2} \qquad N_3^0 = \left(\frac{Q}{2} - \frac{3Q}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2Q}{\sqrt{2}}$$

$$N_4^0 + N_3^0\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad N_4^0 = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}Q}{2} = Q$$

Nodo C

$$N_3^0 \frac{\sqrt{2}}{2} = N_5^0 \qquad N_5^0 = \sqrt{2}Q\frac{\sqrt{2}}{2} = Q$$

$$-N_3^0 \frac{\sqrt{2}}{2} = N_6^0 \qquad N_6^0 = -\sqrt{2}Q\frac{\sqrt{2}}{2} = -Q$$

Nodo F

$$N_5^0 + N_7^0 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \qquad N_7^0 = (Q-Q)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_8^0 - N_7^0 \frac{\sqrt{2}}{2} = N_4^0 \qquad N_8^0 = Q$$

Nodo G

$$N_9^0 = Q$$

$$N_{12}^0 = N_8^0 \qquad N_{12}^0 = Q$$

Nodo D

$$N_9^0 = -N_{11}^0 \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad N_{11}^0 = -Q\sqrt{2}$$

$$N_{10}^0 = -N_{11}^0 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_6^0 = -Q + Q\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} \qquad N_{10}^0 = 0$$

Nodo B

$$N_{10}^0 = 0$$

$$N_{13}^0 = R_{By} = \frac{3}{2}Q$$

Nodo H

$$N_{12}^0 = N_{11}^0 \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad Q = Q\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{13}^0 = N_{11}^0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{Q}{2} \qquad \frac{3Q}{2} = \frac{Q}{2} + Q\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$$

1.3 Studio della struttura S_1'

Lo schema della seguente figura risulta isostatico e le reazioni dei vincoli esterni sono nulle perché, assieme con i carichi esterni, devono costituire un sistema di forze equivalente a zero.

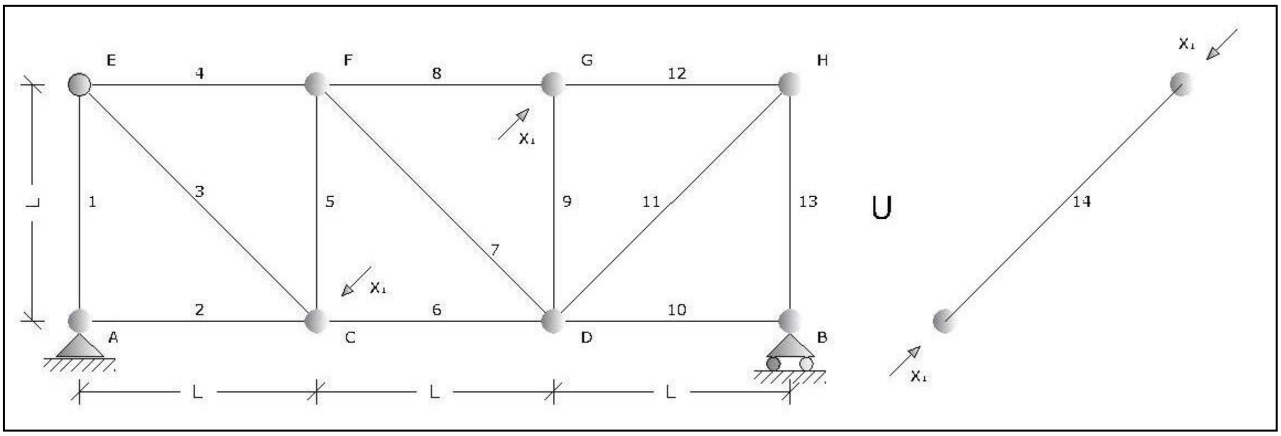

Figura 3 Struttura S_1'

$$R_{Ay} = 0$$

$$R_{By} = 0$$

Per il calcolo degli sforzi normali nei nodi è stato utilizzato il metodo dell'equilibrio ai nodi.

Nodo A

$$N_2^1 = 0$$
$$N_1^1 = 0$$

Nodo E

$$N_1^1 - N_3^1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad N_3^1 = 0$$

$$N_4^1 + N_3^1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad N_4^1 = 0$$

Nodo C

$$N_5^1 = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_6^1 = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nodo G

$$N_9^1 = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_8^1 = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nodo D

$$N_7^1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -N_9^1 \qquad N_7^1 = -X_1$$

Per simmetria:

$$N_{10}^1 = N_{11}^1 = N_{12}^1 = N_{13}^1 = 0$$

Nella seguente tabella riassuntiva si riportano i risultati ottenuti dai due schemi analizzati, assumendo l'incognita iperstatica pari a uno.

Asta	Lunghezza	Schema S_0'	Tipo Asta	Schema S_1'	Tipo Asta
		Sforzo normale		Sforzo normale	
1	l	$\frac{3Q}{2}$	Puntone	0	Scarica
2	l	0	Scarica	0	Scarica
3	$\sqrt{2}l$	$-Q\sqrt{2}$	Tirante	0	Scarica
4	l	Q	Puntone	0	Scarica
5	l	Q	Puntone	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puntone
6	l	$-Q$	Tirante	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puntone
7	$\sqrt{2}l$	0	Scarica	-1	Tirante
8	l	Q	Puntone	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puntone
9	l	Q	Puntone	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puntone
10	l	0	Scarica	0	Scarica
11	$\sqrt{2}l$	$-Q\sqrt{2}$		0	Scarica
12	l	Q	Puntone	0	Scarica
13	l	$\frac{3Q}{2}$	Puntone	0	Scarica

1.4 Calcolo delle incognite iperstatiche e degli spostamenti nodali

Il PLVC, applicato in questo caso, diventa:

$$\sum_{h=1}^{13} N_h^1 \left[\frac{N_h^0}{EA} L_h + X_1 \frac{N_h^1}{EA} L_h \right] = -1\left(X_1 \frac{1 \cdot L_{14}}{EA} \right).$$

Riportando solo gli sforzi normali virtuali non nulli:

$$N_5^1 \left[\frac{N_5^0}{EA} L_5 + X_1 \frac{N_5^1}{EA} L_5 \right] + N_6^1 \left[\frac{N_6^0}{EA} L_6 + X_1 \frac{N_6^1}{EA} L_6 \right] + N_7^1 \left[\frac{N_7^0}{EA} L_7 + X_1 \frac{N_7^1}{EA} L_7 \right] + N_8^1 \left[\frac{N_8^0}{EA} L_8 + X_1 \frac{N_8^1}{EA} L_8 \right] +$$

$$+ N_9^1 \left[\frac{N_9^0}{EA} L_9 + X_1 \frac{N_9^1}{EA} L_9 \right] = -1\left(X_1 \frac{L_{14}}{EA} \right)$$

Sostituendo gli sforzi normali trovati prima:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{Q}{EA} L + X_1 \frac{\sqrt{2}L}{2EA} \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{Q}{EA} L + X_1 \frac{\sqrt{2}L}{2EA} \right] + (-1)\left[X_1 \frac{(-1)\sqrt{2}L}{EA} \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{Q}{EA} L + X_1 \frac{\sqrt{2}L}{2EA} \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{Q}{EA} L + X_1 \frac{\sqrt{2}L}{2EA} \right] = \left[X_1 \frac{(-1)\sqrt{2}L}{EA} \right]$$

Riordinando i termini:

$$X_1 \left[\frac{L}{2EA} + \frac{L}{2EA} + \frac{\sqrt{2}L}{EA} + \frac{L}{2EA} + \frac{L}{2EA} + \frac{\sqrt{2}L}{2EA} \right] + \frac{\sqrt{2}QL}{2EA} = 0.$$

Quindi:

$$X_1 \left[2 + 2\sqrt{2} \right] = \sqrt{2Q} \qquad \rightarrow \qquad X_1 = -\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}.$$

È possibile calcolare gli sforzi normali nella struttura S con la relazione: $N_h = N_h^0 + X_1 N_h^1$.

$$N_1 = \frac{3Q}{2};$$

$$N_2 = 0;$$

$$N_3 = -\sqrt{2}Q;$$

$$N_4 = Q;$$

$$N_5 = Q + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \right) = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)}{2(1+\sqrt{2})};$$

$$N_6 = -Q + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\right) = \frac{Q\left(-3-2\sqrt{2}\right)}{2(1+\sqrt{2})};$$

$$N_7 = (-1)\left(-\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\right) = \frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})};$$

$$N_8 = Q + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\right) = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})};$$

$$N_9 = Q + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{Q}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\right) = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})};$$

$$N_{10} = 0;$$

$$N_{11} = -\sqrt{2}Q;$$

$$N_{12} = Q;$$

$$N_{13} = \frac{3Q}{2}.$$

Per determinare gli spostamenti dei nodi, verticali v ed orizzontali w, si utilizza la relazione matriciale: $Cs = \Delta$.

Dove:

- C è la matrice cinematica;
- s è il vettore degli spostamenti incogniti:

  $s:[v_A; w_A; v_B; w_B; v_C; w_C; v_D; w_D; v_E; w_E; v_F; w_F; v_G; w_G; v_H; w_H]^T$;
- Δ è il vettore dei termini noti, degli allungamenti / accorciamenti delle aste.

L'allungamento della generica asta i – j, soggetta a degli spostamenti v e w agli estremi, è pari a:

$$\Delta s_{ij} = (w_j - w_i)\cdot \cos\alpha_{ij} - (v_j - v_i)\cdot sen\alpha_{ij}.$$

Noto lo sforzo normale e la rigidezza estensionale della generica asta è possibile calcolare l'allungamento dell'asta:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta s_{ij}}{L_{ij}} = \frac{N_{ij}}{EA} \qquad \rightarrow \qquad \Delta s_{ij} = \frac{N_{ij}}{EA} L_{ij}.$$

Applicando le precedenti relazioni si ottengono le seguenti equazioni:

$$\Delta s_{AC} = w_C - w_A = \frac{N_{AC}}{EA} L_{AC} = 0;$$

$$\Delta s_{CD} = w_D - w_C = \frac{N_{CD}}{EA} L_{CD} = \frac{Q\left(-3-2\sqrt{2}\right)L}{2(1+\sqrt{2})EA};$$

$$\Delta s_{DB} = w_B - w_D = \frac{N_{DB}}{EA} L_{DB} = 0;$$

$$\Delta s_{BH} = v_B - v_H = \frac{N_{BH}}{EA} L_{BH} = \frac{3QL}{2EA};$$

$$\Delta s_{GH} = w_H - w_G = \frac{N_{GH}}{EA} L_{GH} = \frac{QL}{EA};$$

$$\Delta s_{FG} = w_G - w_F = \frac{N_{FG}}{EA} L_{FG} = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)L}{2(1+\sqrt{2})EA};$$

$$\Delta s_{AE} = v_A - v_E = \frac{NA_{AE}}{EA} L_{AE} = \frac{3QL}{2EA};$$

$$\Delta s_{CF} = v_C - v_F = \frac{N_{CF}}{EA} L_{CF} = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)L}{2(1+\sqrt{2})EA};$$

$$\Delta s_{DG} = v_D - v_G = \frac{N_{DG}}{EA} L_{DG} = \frac{Q\left(1+2\sqrt{2}\right)L}{2(1+\sqrt{2})EA};$$

$$\Delta s_{EC} = \left(w_C - w_E\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(v_C - v_E\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{N_{EC}}{EA} L_{EC} = \frac{-2QL}{EA};$$

$$\Delta s_{FD} = \left(w_D - w_F\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(v_F - v_D\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{N_{FD}}{EA} L_{FD} = \frac{QL}{\left(1+\sqrt{2}\right)EA};$$

$$\Delta s_{DH} = \left(w_H - w_D\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(v_D - v_H\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{N_{DH}}{EA} L_{DH} = \frac{-2QL}{EA}.$$

Ovviamente deve poi risultare:

$v_A = 0$;

$w_A = 0$;

$v_B = 0$.

Le equazioni di sopra si possono riscrivere in forma matriciale. Invertendo la matrice cinematica è possibile ricavare le incognite.

$$C=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&0&0&0&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{bmatrix};$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Q\cdot\left(-3-2\sqrt{2}\right)\cdot L}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot EA} & 0 & \frac{3QL}{2EA} & \frac{QL}{EA} & \frac{Q\cdot\left(-3-2\sqrt{2}\right)\cdot L}{2\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot EA} & \frac{QL}{EA} & \frac{3QL}{2EA} & \frac{Q\cdot\left(-3-2\sqrt{2}\right)\cdot L}{2\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot EA} & \frac{Q\cdot\left(-3-2\sqrt{2}\right)\cdot L}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot EA} & -\frac{2QL}{EA} & \frac{QL}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot EA} & -\frac{2QL}{EA}\end{bmatrix}$$