

# Esercizio 2

---

## “Telaio ad aste inestensibili”

Carpentieri Gerardo

23/12/2013

2.1 Descrizione preliminare della struttura

2.2 Studio della struttura  $S''_0$

2.3 Studio della matrice di rigidezza

2.4 Calcolo degli spostamenti nodali

## 2.1 Descrizione preliminare della struttura

È dato il telaio ad aste inestensibili ed indeformabili a taglio.

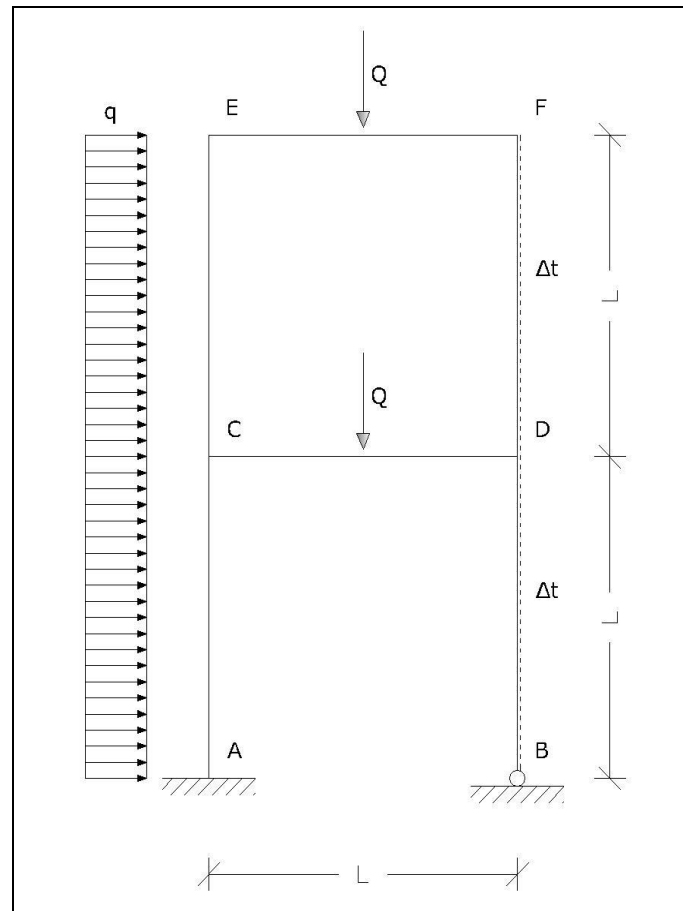


Figura 1 Telaio S.

Calcolare il telaio con il metodo degli spostamenti e tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione. Disegnare, a maniera, la deformata del telaio.

Si supponga:  $Q = 10^{-8} El^2$  ;  $q = Q/l$  ;  $\Delta t^+ = 10^{-4} \alpha^{-1}$

Essendo  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione lineare del materiale ed E il modulo di Young.

Si tenga presente che le inestensibilità delle aste è nei confronti dello sforzo assiale ma non nei confronti della distorsione termica uniforme assegnata.

In primo luogo si procede allo studio del grado di iperstaticità della struttura utilizzando la formula:

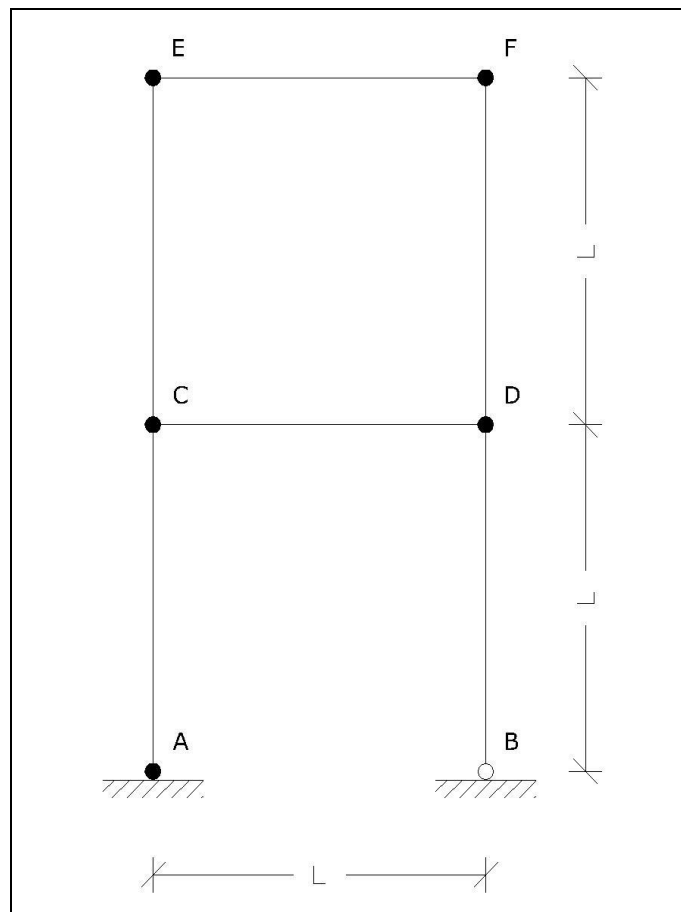
$$3t - s = l - i,$$

dove:

- $t$  è il numero di tronchi (6);
- $s$  è la somma delle molteplicità dei vincoli esterni ed interni (23);
- $l$  è il grado di labilità (0);
- $i$  è il grado di iperstaticità (5).

In definitiva la struttura in Figura 1 risulta cinque volte iperstatica.

Dal sistema reticolare associato, ottenuto sostituendo ad ogni incastro interno una cerniera, si vede che la struttura  $S$  è a due nodi spostabili.



**Figura 2** Struttura reticolare associata.

Per applicare il metodo degli spostamenti si assumono come incognite gli spostamenti nodali: le quattro rotazioni dei nodi interni C, D, E, F e gli spostamenti orizzontali di piano. Per ricavare le incognite si procede aggiungendo al sistema S sei vincoli ausiliari (fittizi) che bloccano gli spostamenti incogniti e si ottiene la struttura a nodi bloccati S''. Si procede quindi analizzando il sistema a nodi bloccati S<sub>0</sub>'', sul quale si applicano i carichi attivi e la distorsione termica. Lo scopo è il calcolo delle reazioni vincolari dei morsetti e degli appoggi aggiunti, ovvero delle reazioni di incastro perfetto. In seguito si considerano sei sistemi S<sub>i</sub>'', in cui si assegnano dei cedimenti unitari ai vincoli ausiliari e se ne calcolano le reazioni, che corrisponderanno ai termini della matrice di rigidezza della struttura. Infine si applica il principio di sovrapposizione degli effetti e si sommano le varie reazioni dei vincoli ausiliari nei diversi schemi, in funzione degli spostamenti incogniti, e si pongono a zero. Il motivo, infatti, è che i vincoli ausiliari non esistono e perciò le corrispondenti reazioni sono nulle.

Il problema consiste nel risolvere il seguente sistema in forma matriciale:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{Q}$$

Dove:

- K è la matrice di rigidezza;
- u è il vettore degli spostamenti;
- Q è il vettore dei carichi.

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} \varphi_C \\ \varphi_D \\ \varphi_E \\ \varphi_F \\ \delta_D \\ \delta_F \end{Bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{Bmatrix} Q_C \\ Q_D \\ Q_E \\ Q_F \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}$$

## 2.2 Studio della struttura $S_0''$

Il sistema  $S_0''$ , per il quale si determinano le componenti del vettore dei termini noti è il seguente.

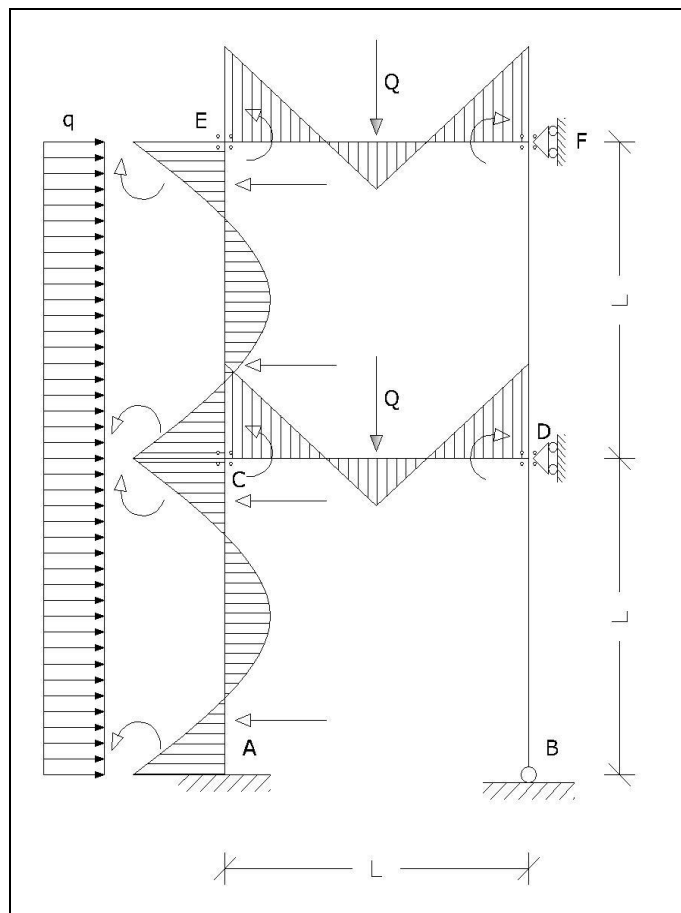


Figura 3 Struttura  $S_0''$ .

$$Q_c = -[M_c] = -\left[-\frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} + \frac{Ql}{8} - \alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}\right] = -\frac{Ql}{8} + \alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}$$

$$Q_D = -[M_D] = +\frac{Ql}{8} + \alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}$$

$$Q_E = -[M_E] = -\left[-\frac{ql^2}{12} + \frac{Ql}{8} - 2\alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}\right] = \frac{ql^2}{12} - \frac{Ql}{8} + 2\alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}$$

$$Q_F = -[M_F] = +\frac{ql}{8} + \alpha\Delta t l \frac{6EI}{l^2}$$

$$Q_5 = H - R_D = ql$$

$$Q_6 = H - R_F = \frac{ql}{2}$$

Si tiene conto anche della distorsione termica  $\Delta t$  che comporta un allungamento dei ritti BD e DF.

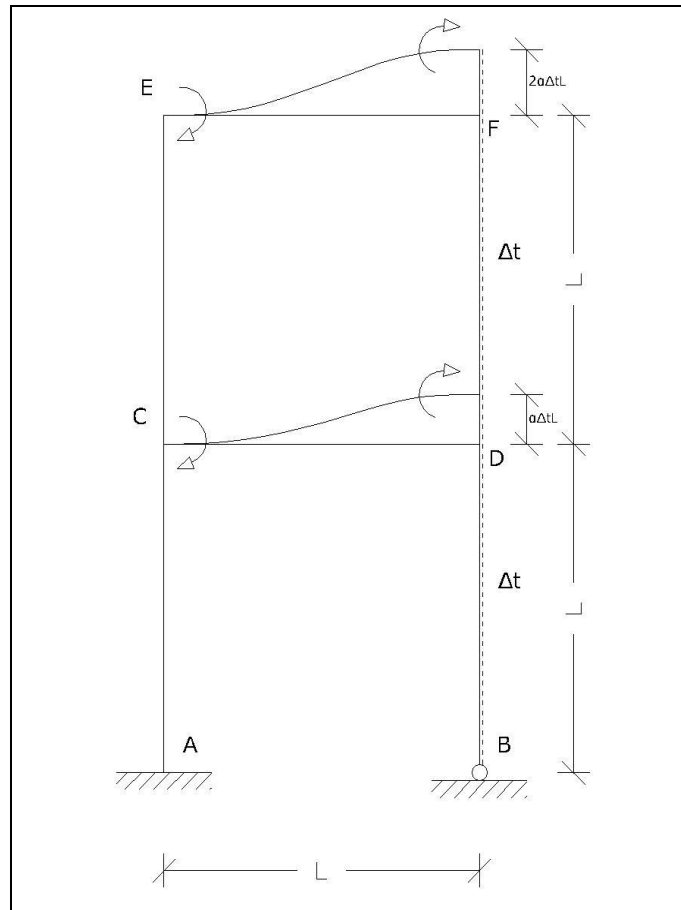


Figura 4 Effetto della distorsione termica.

## 2.3 Studio della matrice di rigidità

Si assegni un cedimento  $\varphi_C$  unitario.

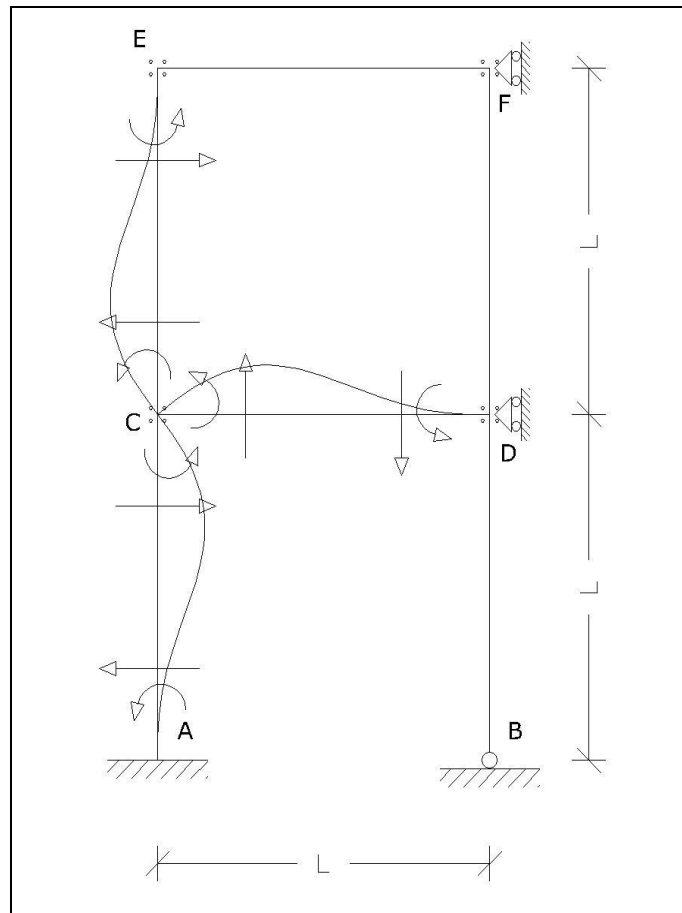


Figura 5 Struttura  $S_1''$ .

$$K_{11} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l}$$

$$K_{21} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{31} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{41} = 0$$

$$K_{51} = 0$$

$$K_{61} = \frac{6EI}{l}$$

Si assegni un cedimento  $\varphi_D$  unitario.

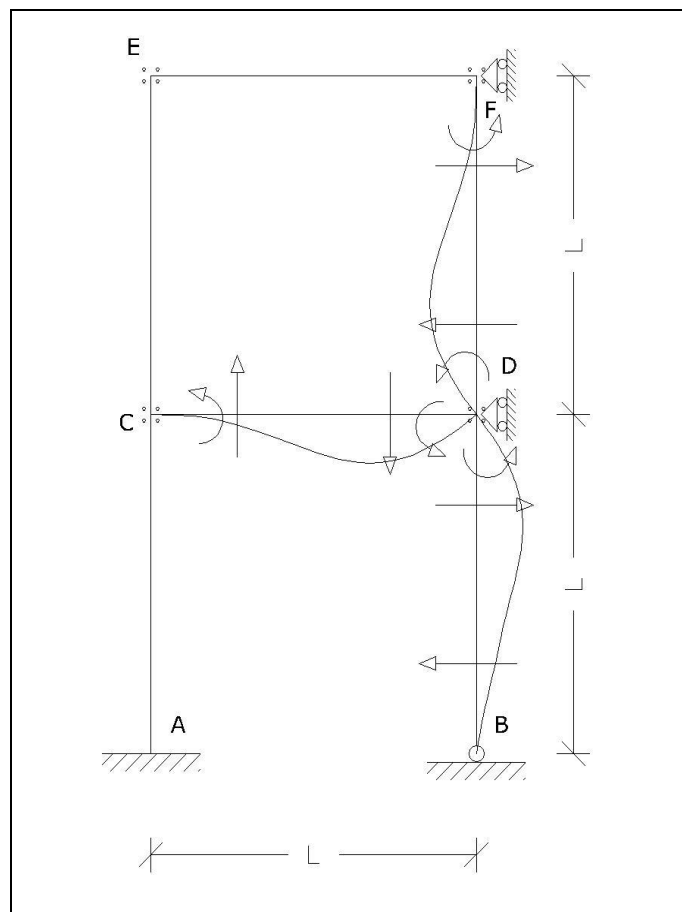


Figura 6 Struttura  $S_2''$ .



$$K_{22} = \frac{3EI}{l} + \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l}$$

$$K_{12} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{32} = 0$$

$$K_{42} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{52} = -\frac{3EI}{l^2}$$

$$K_{62} = \frac{6EI}{l^2}$$

Si assegni un cedimento  $\varphi_E$  unitario.

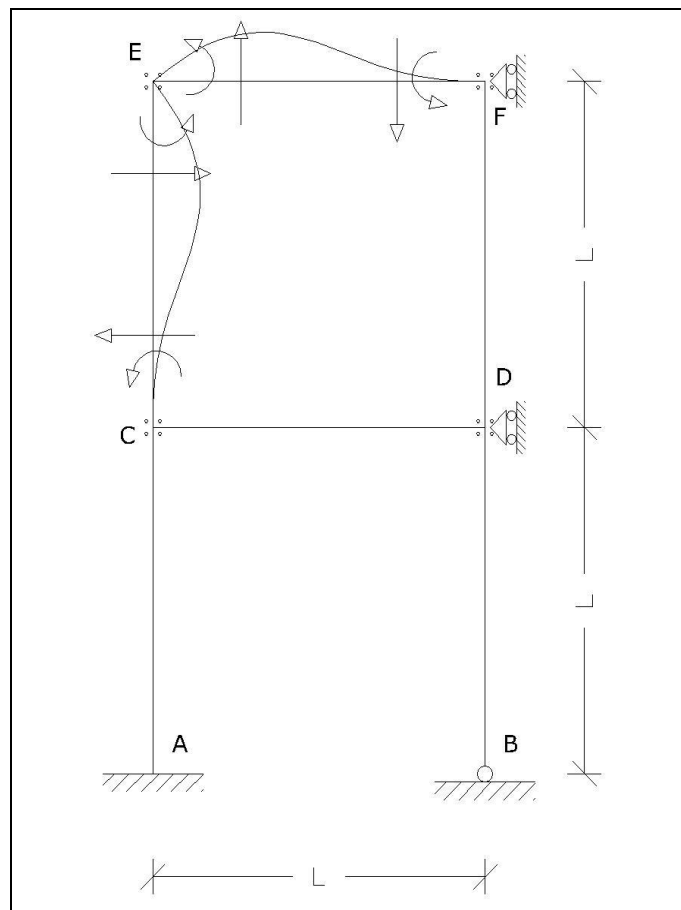


Figura 7 Struttura  $S_3''$ .

$$K_{33} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l}$$

$$K_{13} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{43} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{23} = 0$$

$$K_{53} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{63} = \frac{6EI}{l^2}$$

Si assegni un cedimento  $\varphi_F$  unitario.

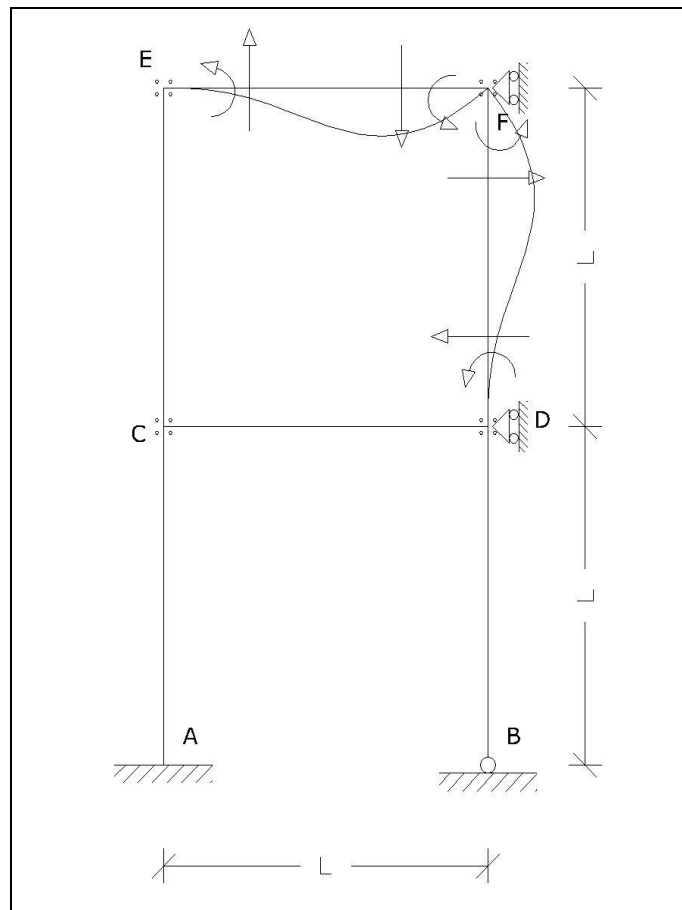


Figura 8 Struttura  $S_4''$ .

$$K_{44} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l}$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{24} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{34} = \frac{2EI}{l}$$

$$K_{54} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{64} = \frac{6EI}{l^2}$$

Si assegni un cedimento  $\delta_D$  unitario.

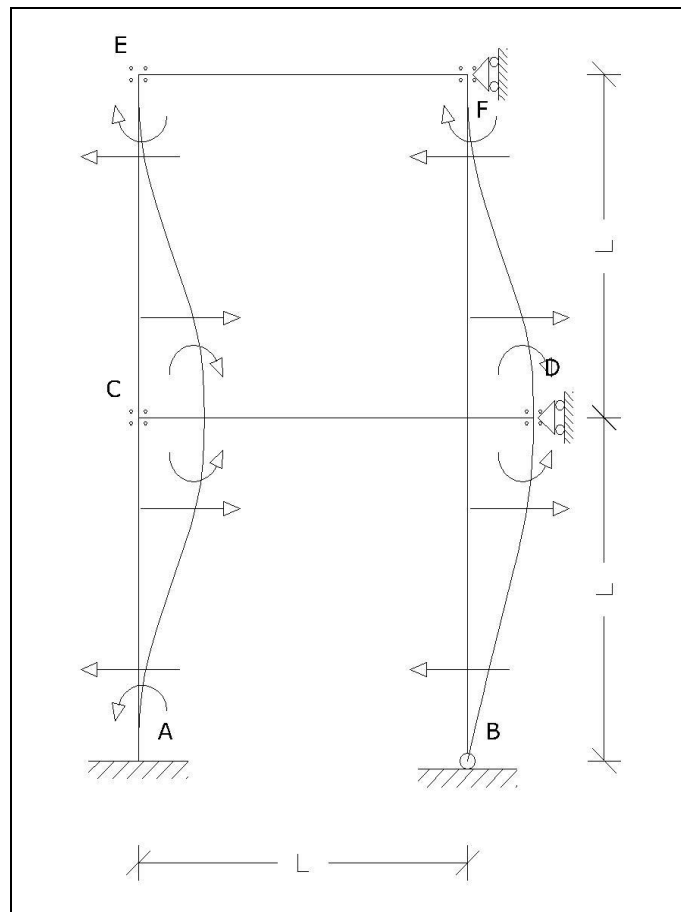


Figura 9 Struttura  $S_5''$ .

$$K_{15} = 0$$

$$K_{35} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{45} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{25} = -\frac{3EI}{l^2}$$

$$K_{55} = -\frac{3EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3}$$

$$K_{65} = -\frac{24EI}{l^3}$$

Si assegni un cedimento  $\delta_F$  unitario.

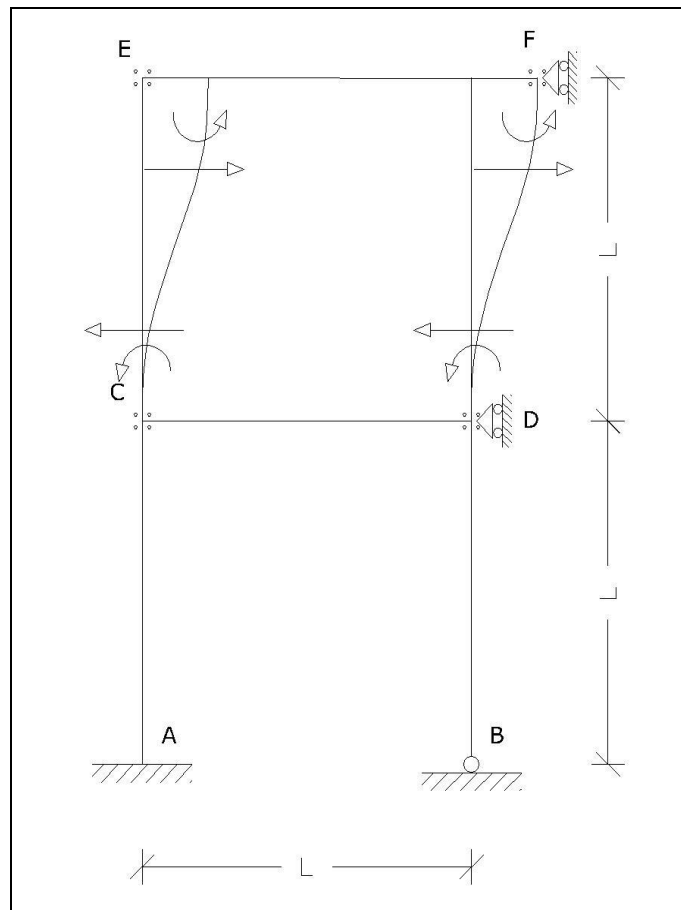


Figura 10 Struttura  $S_6''$ .

$$K_{16} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{36} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{26} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{46} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$K_{56} = -\frac{24EI}{l^3}$$

$$K_{66} = \frac{24EI}{l^3}$$

Esplicitando il precedente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & K_{41} & K_{51} & K_{61} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & K_{42} & K_{52} & K_{62} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{43} & K_{53} & K_{63} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{54} & K_{64} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{65} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_C \\ \varphi_D \\ \varphi_E \\ \varphi_F \\ \delta_D \\ \delta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_C \\ Q_D \\ Q_E \\ Q_F \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Calcolo degli spostamenti nodali

Invertendo il precedente sistema si ottiene la matrice delle deformabilità e quindi le incognite di spostamento. Si possono calcolare i momenti agli estremi di ogni asta ed i rispettivi tagli. Dalle equazioni di equilibrio nodali alla traslazione orizzontale e verticale si ottengono gli sforzi normali nelle aste. Infine si possono ottenere i diagrammi delle caratteristiche interne della struttura.