

Esercizio 3

“Telaio con ritto rigido”

Carpentieri Gerardo

20/06/2009

3.1 Descrizione preliminare della struttura

3.2 Studio della struttura S''_0

3.3 Studio della matrice di rigidezza

3.4 Calcolo degli spostamenti nodali

3.1 Descrizione preliminare della struttura

È dato il telaio rappresentato in figura:

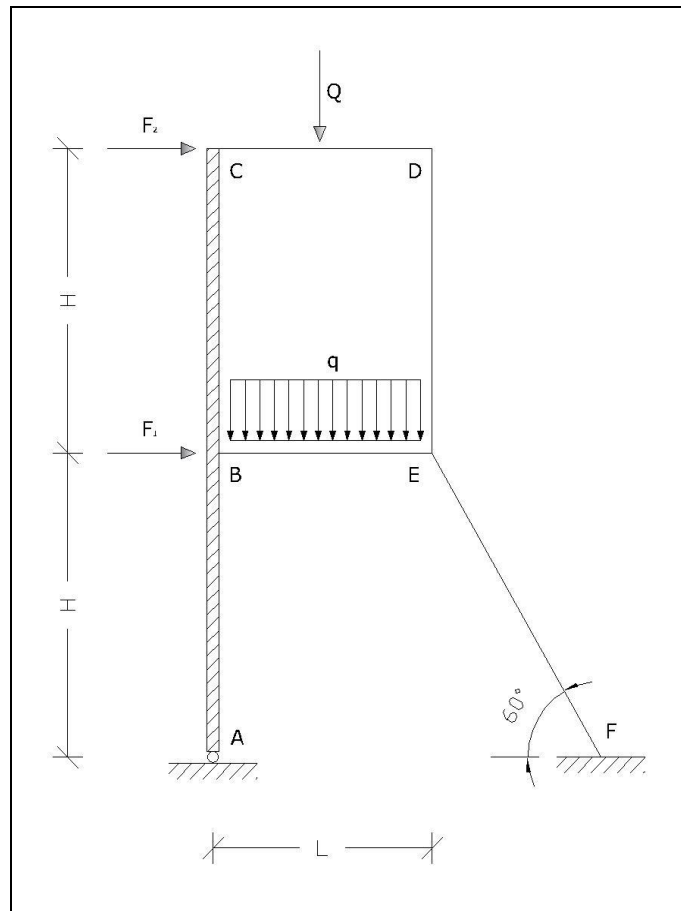


Figura 1 Struttura S.

Si suppone che il ritto di sinistra, tratteggiato in figura, sia rigido.

Si calcolino con il metodo degli spostamenti le caratteristiche della sollecitazione nel telaio e se ne disegni, a maniera, la deformata ipotizzando che :

$$Q = 10^{-8} El^2 ; q = Q/l ; H_1 = H_2 = 0,10 Q ; h = (2/3)l ; I = 10^{-5} l^4$$

Essendo E il modulo di Young del materiale e I il momento di inerzia, comune a tutte le aste non rigide.

In primo luogo si procede allo studio del grado di iperstaticità della struttura utilizzando la formula:

$$3t - s = l - i,$$

dove:

- t è il numero di tronchi (5);
- s è la somma delle molteplicità dei vincoli esterni ed interni (20);
- l è il grado di labilità (0);
- i è il grado di iperstaticità (5).

In definitiva la struttura in Figura 1 risulta cinque volte iperstatica.

Dal sistema reticolare associato, ottenuto sostituendo ad ogni incastro interno una cerniera, si vede che la struttura S è ad un nodo spostabile.

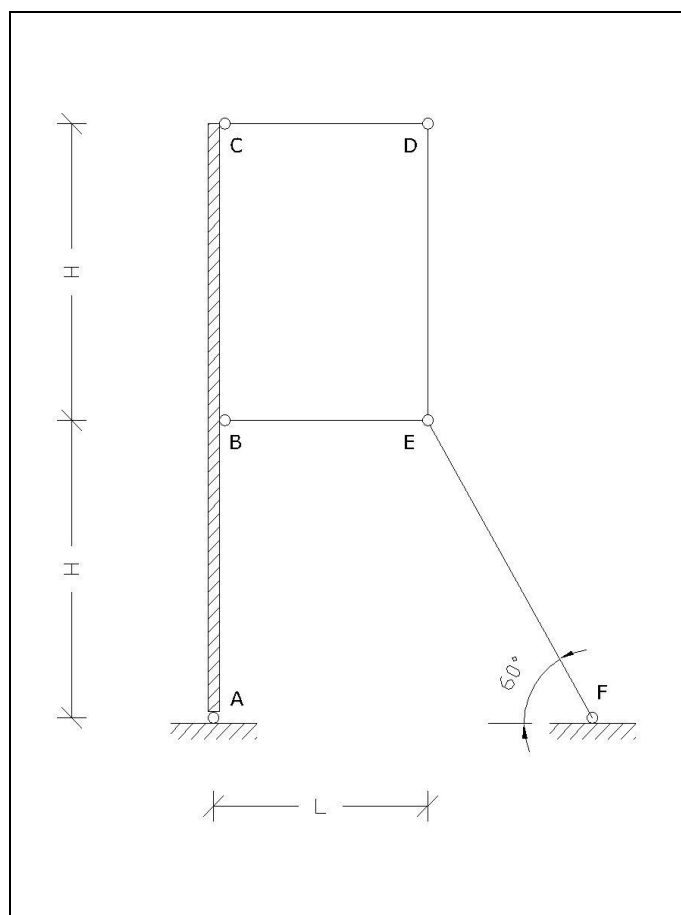


Figura 2 Struttura reticolare associata.

3.2 Studio della struttura S_0''

Per applicare il metodo degli spostamenti si assumono come incognite gli spostamenti nodali: le due rotazioni dei nodi interni D ed E e lo spostamento orizzontale di piano. Per ricavare le incognite si procede aggiungendo al sistema S dei vincoli ausiliari (fittizi) che bloccano gli spostamenti incogniti e si ottiene la struttura a nodi bloccati S'' . Si procede quindi analizzando il sistema a nodi bloccati S_0'' , sul quale si applicano i carichi attivi. Lo scopo è il calcolo delle reazioni vincolari dei morsetti e dell'appoggio, ovvero delle reazioni di incastro perfetto. In seguito si considerano due sistemi S_i'' in cui si assegnano dei cedimenti unitari ai vincoli ausiliari e se ne calcolano le reazioni, che corrisponderanno ai termini della matrice di rigidezza della struttura. Infine si applica il principio di sovrapposizione degli effetti e si sommano le varie reazioni dei vincoli ausiliari nei diversi schemi, in funzione degli spostamenti incogniti, e si pongono a zero. Il motivo, infatti, è che i vincoli ausiliari non esistono e perciò le corrispondenti reazioni sono nulle.

Il problema consiste nel risolvere il seguente sistema in forma matriciale:

$$\underline{Ku} = \underline{Q}$$

Dove:

- K è la matrice di rigidezza;
- u è il vettore degli spostamenti;
- Q è il vettore dei carichi.

Il sistema S_0'' , per il quale si determinano le componenti del vettore dei termini noti è il seguente.

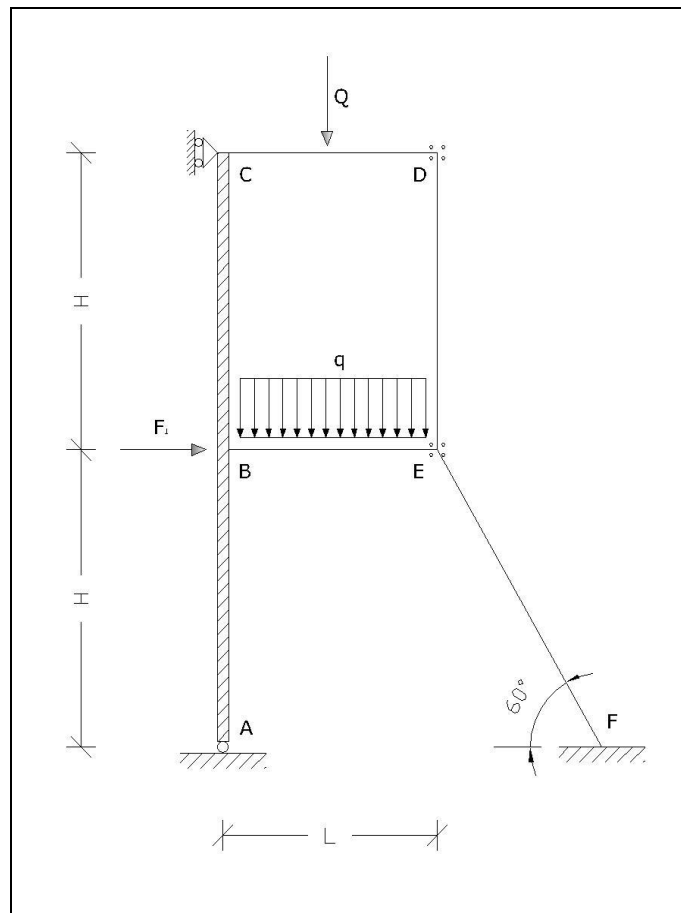


Figura 3 Struttura a nodi bloccati S_0'' .

Il vettore dei carichi contiene le reazioni dei tre vincoli ausiliari nello schema a nodi bloccati:

$$\underline{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}.$$

Vale:

$$Q_1 = -[M_E] = \frac{ql^2}{12};$$

$$Q_2 = -[M_D] = +\frac{Ql}{8}.$$

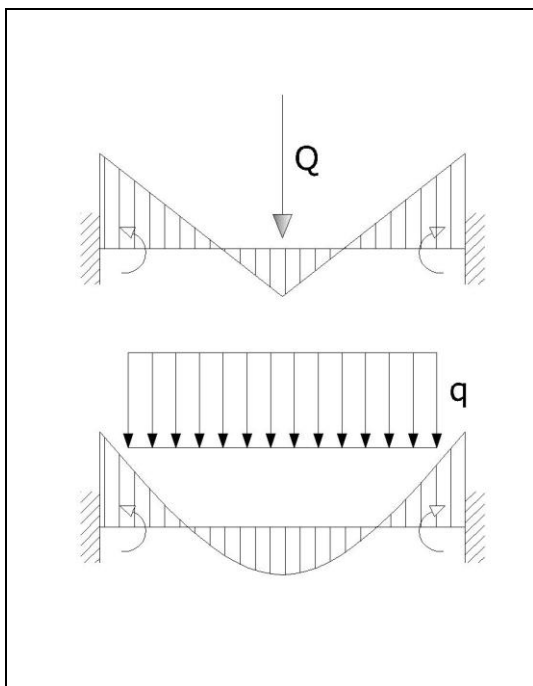


Figura 5 Reazioni dei morsetti.

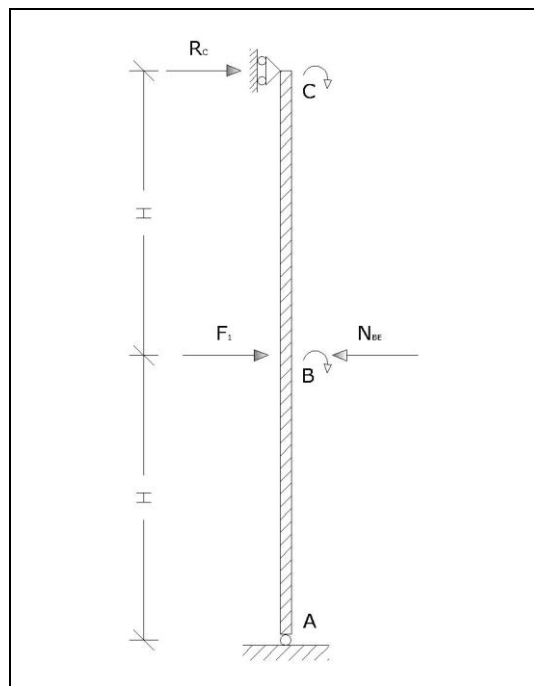


Figura 4 Reazione dell'appoggio.

Per il calcolo della reazione del carrello, si impone il momento in A nullo:

$$R_c = -\frac{F}{2} - \frac{Ql}{16h} - \frac{ql^2}{24h} + \frac{N_{BE}}{2};$$

Dove, per l'equilibrio al nodo E:

$$N_{BE} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (Q + ql).$$

Quindi:

$$Q_3 = F_2 - R_c = F_2 + \frac{F}{2} + \frac{Ql}{16h} + \frac{ql^2}{24h}.$$

3.3 Studio della matrice di rigidità

Si assegni un cedimento φ_E unitario.

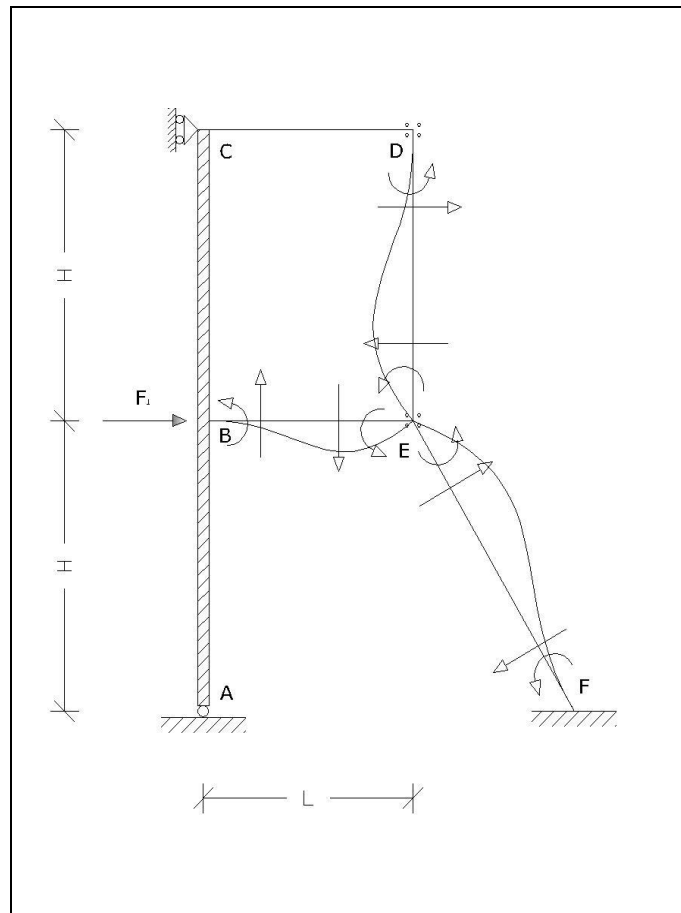


Figura 6 Struttura S_1'' .

$$K_{11} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{h} + \frac{6EI}{\sqrt{3}h}$$

$$K_{21} = \frac{2EI}{h}$$

Per valutare K_{31} facciamo l'equilibrio intorno ad A :

$$N_{EF} \cos(30^\circ) - T_{BE} + T_{EF} \cos(60^\circ) = 0;$$

$$-N_{BE} + N_{EF} \cos(30^\circ) + N_{ED} + T_{EF} \cos(30^\circ) = 0;$$

$$N_{EF} = \frac{12EI}{\sqrt{3}l^2} - \frac{9EI}{\sqrt{3}2h}$$

$$N_{BE} = \frac{6EI}{\sqrt{3}l^2} + EI(6 - 3\sqrt{3})$$

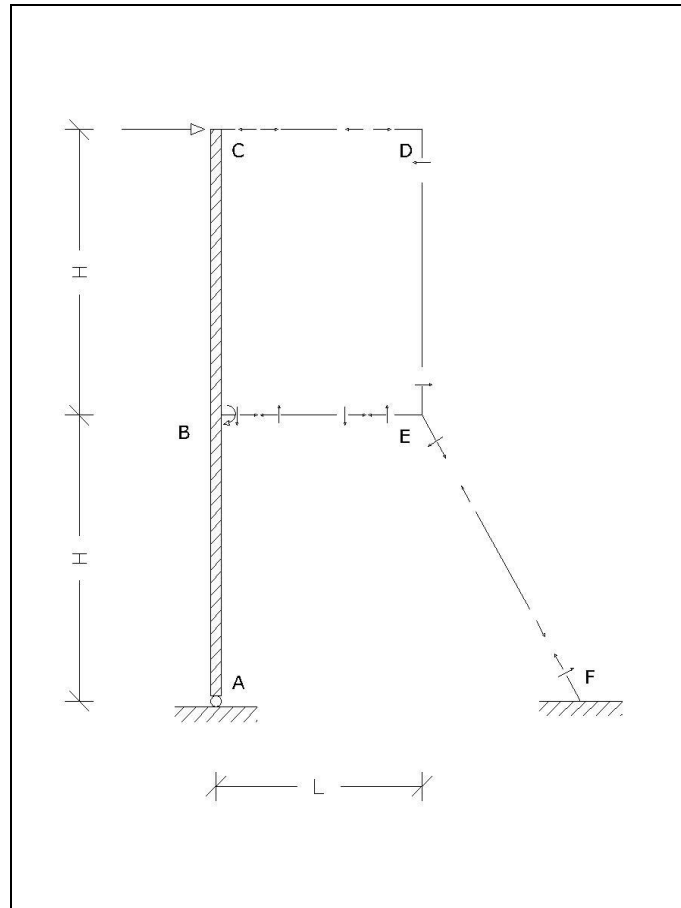


Figura 7 Calcolo di K_{31} .

$$-K_{31}2h + \frac{6EI}{h^2}2h - \left[\frac{6EI}{\sqrt{3}l^2} + \frac{EI}{h^2}(6 - \sqrt{3}) \right] h = 0$$

$$K_{31} = \frac{3EI}{h^2} - \frac{\sqrt{3}EI}{l^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2h^2}EI - \frac{EI}{lh}$$

Si assegni un cedimento φ_E unitario.

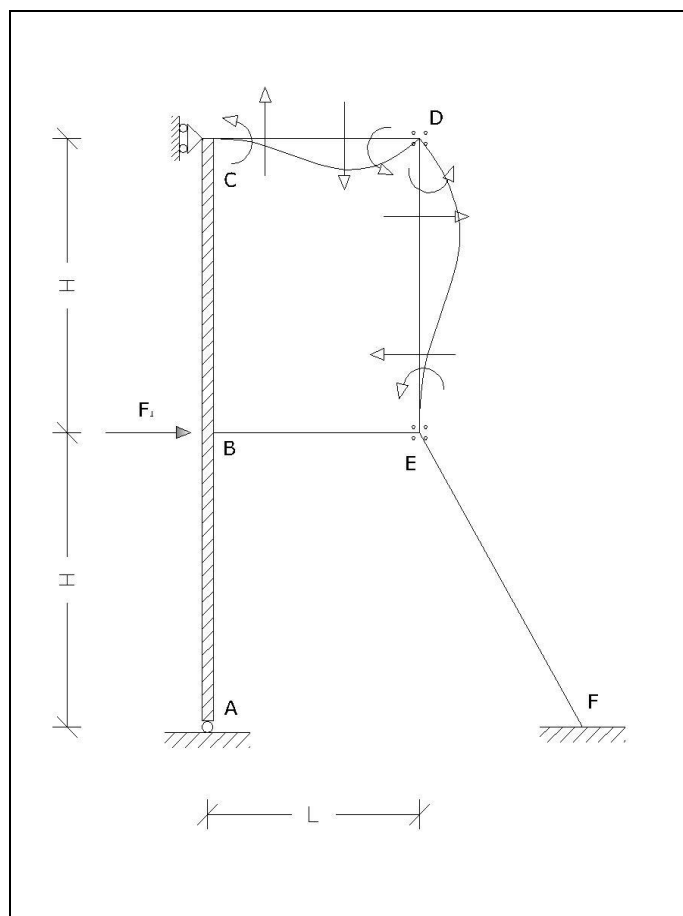


Figura 8 Struttura S_2'' .

$$K_{22} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{h}$$

$$K_{12} = \frac{2EI}{h}$$

Per valutare K_{32} facciamo l'equilibrio intorno ad A:

$$N_{EF} \cos(30^\circ) - \frac{6EI}{l^2} = 0;$$

$$-N_{EB} + \frac{6EI}{h^2} + N_{EF} \cos(60^\circ) = 0;$$

$$N_{EB} = \frac{6EI}{h^2} + \frac{6EI}{\sqrt{3}l^2}$$

$$N_{GF} = \frac{12EI}{\sqrt{3}l^2}$$

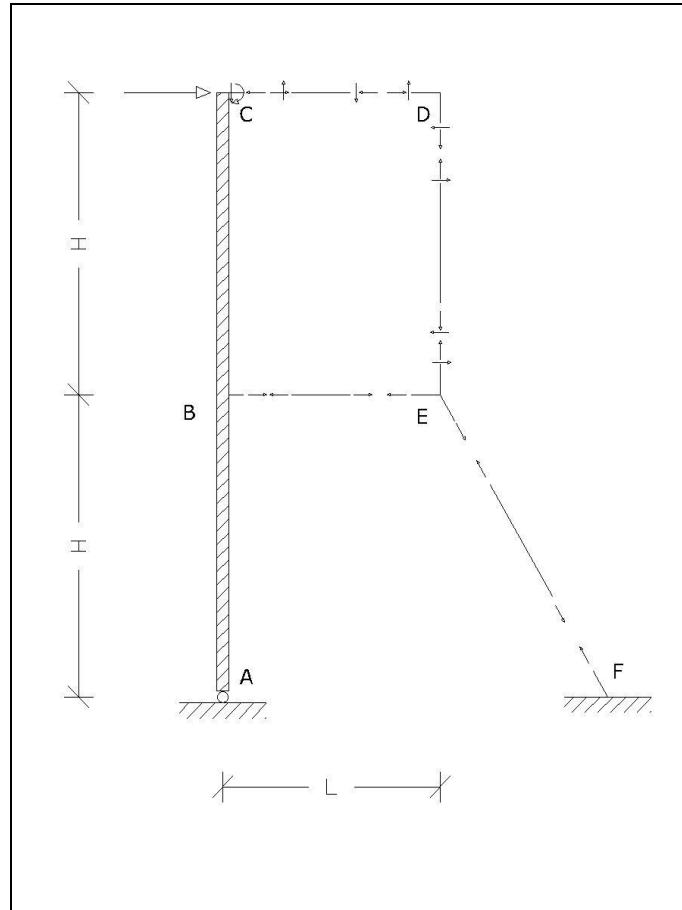


Figura 9 Calcolo di K_{32} .

$$-K_{32}2h + N_{CD}2h - N_{BE} - \frac{2EI}{L} = 0$$

$$K_{32} = 3EI \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{\sqrt{3}l^2} \right) - \frac{EI}{lh}$$

Si assegni un cedimento δ_C unitario.

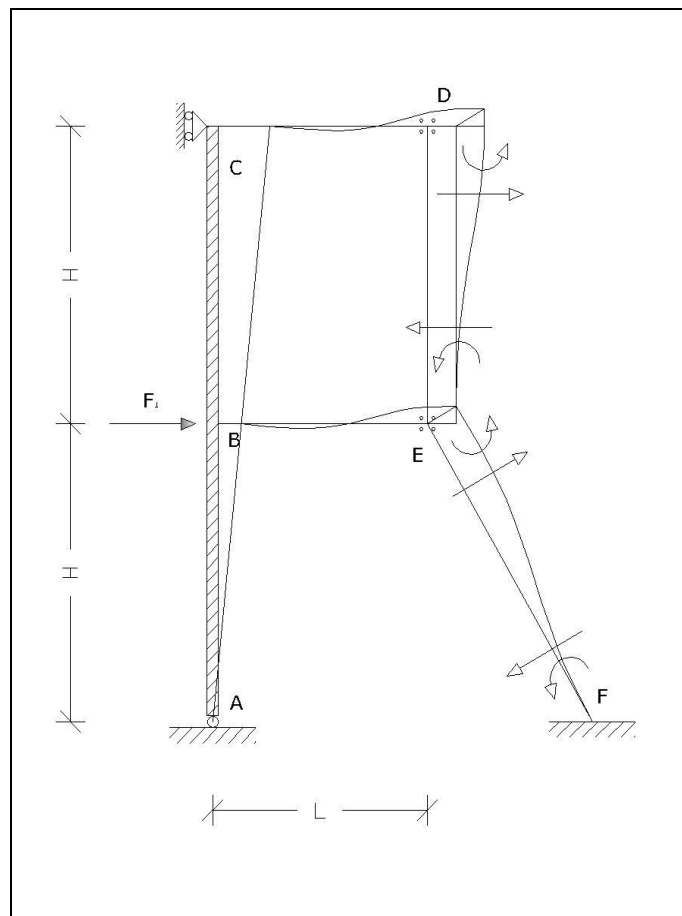


Figura 10 Struttura S_3'' .

Le travi della precedente struttura, oltre ad avere un cedimento traslazionale, subiscono anche un cedimento rotazionale.

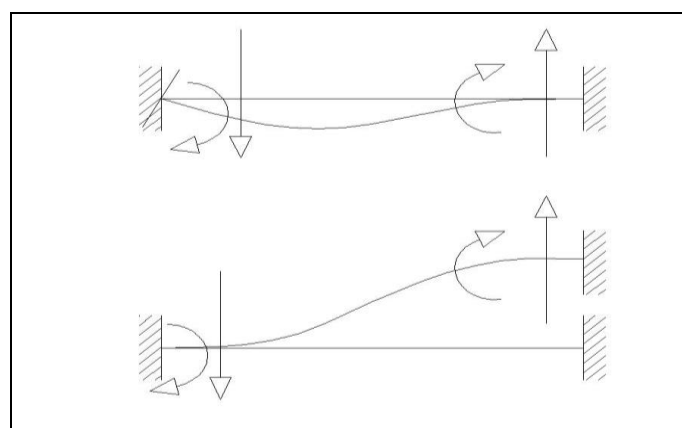


Figura 11 Sovrapposizione degli effetti.

$$M_{EB} = M_{CD} = \frac{EI}{lh} + \frac{\sqrt{3}EI}{l^2}$$

$$M_{BE} = M_{DC} = \frac{\sqrt{3}EI}{l^2} + \frac{2EI}{h^2}$$

$$T_{EB} = T_{BE} = T_{CD} = T_{DC} = \frac{2\sqrt{3}EI}{l^3} + \frac{3EI}{l^2h}$$

$$K_{13} = -\frac{EI}{lh} - \frac{\sqrt{3}EI}{l^2} + \frac{3EI}{h^2} + \frac{\sqrt{3}EI}{h^2} \frac{3}{2}$$

$$K_{23} = -\frac{EI}{lh} - \frac{\sqrt{3}EI}{l^2} + \frac{3EI}{h^2}$$

Per valutare K_{33} facciamo l'equilibrio intorno ad A:

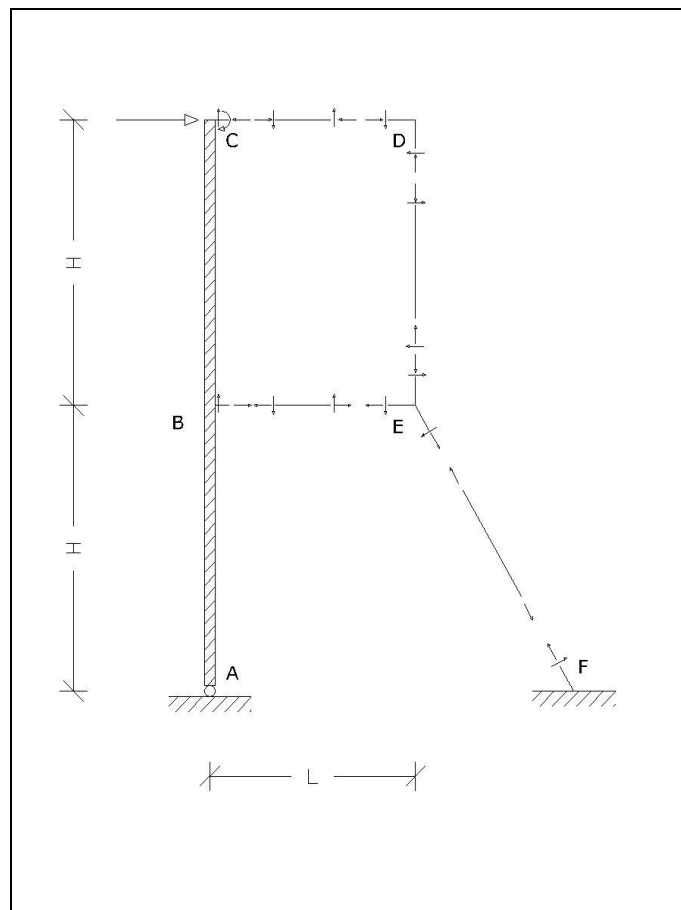


Figura 12 Calcolo di K_{33} .

$$N_{EF} \cos(30^\circ) + T_{EF} \cos(60^\circ) + T_{EB} + N_{ED} = 0;$$

$$-N_{EB} + T_{ED} + N_{EF} \cos(60^\circ) - T_{EF} \cos(30^\circ) = 0;$$

$$N_{EF} = -\frac{4\sqrt{3}EI}{l^2h} - \frac{8EI}{l^3} - \frac{\sqrt{3}EI}{h^3} \frac{3}{2}$$

$$N_{EB} = -\frac{4EI}{l^3} - \frac{2\sqrt{3}EI}{l^2h} + \frac{6EI}{h^3} - \frac{\sqrt{3}EI}{h^3} \frac{3}{2} \quad .$$

$$K_{33} = \frac{2EI}{lh^2} + \frac{2\sqrt{3}EI}{l^2h} + \frac{3EI}{h^3} + \frac{\sqrt{3}EI}{h^3} \frac{3}{2} + \frac{2EI}{l^3}$$

3.4 Calcolo degli spostamenti nodali

Esplicitando il precedente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_E \\ \varphi_D \\ \delta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} .$$

Invertendo il precedente sistema si ottiene la matrice delle deformabilità e quindi le incognite di spostamento. Si possono calcolare i momenti agli estremi di ogni asta ed i rispettivi tagli. Dalle equazioni di equilibrio nodali alla traslazione orizzontale e verticale si ottengono gli sforzi normali nelle aste. Infine si possono ottenere i diagrammi delle caratteristiche interne della struttura.