



XXIV CONGRESSO C.T.A.

LE GIORNATE ITALIANE
DELLA COSTRUZIONE IN ACCIAIO

THE ITALIAN STEEL DAYS

30 Settembre – 2 Ottobre 2013
Torino

VOLUME 2

ISBN 978-88-905870-0-9

Tutti i diritti riservati.
È vietata ogni riproduzione.

TENSEGRITY, TENSOSTRUTTURE E STRUTTURE
PER ARCHITETTURE TESSILI E NON CONVENZIONALI

*TENSEGRITY, TENSILE, TEXTILE
AND UNCONVENTIONAL STRUCTURES*

ARCHITETTURE TENSEGRITY PARAMETRICHE PER PONTI DI MASSA MINIMA

Fernando Fraternali
Università
di Salerno
Dipartimento di
Ingegneria Civile
Salerno, Italia
f.fraternali@unisa.it

Gerardo Carpentieri
Università
di Salerno
Dipartimento di
Ingegneria Civile
Salerno, Italia
gcarpentieri@unisa.it

Robert E. Skelton,
University of California
San Diego
Department of Mechanical
& Aerospace Engineering
La Jolla, California (USA)
bobskelton@ucsd.edu

Andrea Micheletti
Università di Roma
Tor Vergata
Dip. di Ingegneria Civile
e Ingegneria Informatica
Roma, Italia
micheletti@ing.uniroma2.it

ABSTRACT

In this work we present a methodology for the parametric design of tensegrity bridges, which is aimed to mass minimization, and is inspired by fractal geometry. We state a topology optimization problem by using self-similar repetitions of the minimal mass forms presented by Michell in [8]. The topology of the bridge is parameterized in terms of two discrete variables, describing the structural complexity, and two continuous variables, which describe the overall geometry. An iterative optimization procedure is employed to obtain the minimum mass solution under yielding and buckling constraints. Several numerical results are obtained, allowing us to explore the potential of the analyzed design method, and its multiscale character.

SOMMARIO

Il presente lavoro formula una metodologia per il progetto parametrico di strutture da ponte di tipo “tensegrity”, che ha l’obiettivo di minimizzarne la massa, utilizzando forme ispirate dalla geometria frattale. Si presenta un problema di ottimizzazione topologica che utilizza la ripetizione *self-similar* delle forme reticolari di massa minima ottenute da A.G. M. Michell in un suo celebre lavoro del 1904 [8]. La topologia del ponte è parametrizzata in funzione di due variabili discrete, che ne descrivono la complessità strutturale, e due variabili continue, che determinano la geometria del modello di ponte. Una procedura iterativa di ottimizzazione è impiegata per ottenere configurazioni di minima massa sotto opportuni vincoli di snervamento e di instabilità per carico di punta. Si presentano diversi risultati numerici, che consentono di esplorare le potenziali applicazioni tecniche del metodo di progettazione proposto.

1 INTRODUZIONE

Negli ultimi anni, il problema della ricerca di forma (“form-finding”) delle strutture tensegrity ha attratto l’interesse di molti studiosi, non soltanto per la particolare abilità di queste strutture ad operare come sistemi controllabili [6-14], ma anche perché è stato provato che le architetture tensegrity assicurano configurazioni di minima massa per una serie di condizioni di carico significative (strutture a mensola; strutture appoggiate agli estremi; strutture soggette a condizioni di carico da compressione, trazione e torsione) senza che si verifichino collassi strutturali per snervamento o instabilità [15]. Particolarmente interessante è l’utilizzo di geometrie frattali nell’ambito di metodi di ricerca di forma di strutture tensegrity, che derivi dall’impiego di un numero finito o infinito di ripetizioni di geometrie modulari elementari [14]. Un tratto fondamentale degli studi presentati in quest’ambito nel lavoro [14] consiste nella ricerca dei valori ottimali di parametri di complessità strutturale relativi a diverse tipologie di strutture tensegrity, che assicurino elevate prestazioni meccaniche e conducano alla

progettazione di eleganti “frattali tensegrity”. L’approccio frattale alla ricerca di forma apre la strada ad una effettiva applicazione del “paradigma” tensegrity nell’ambito della moderna architettura parametrica [10,11].

Il presente lavoro riguarda il progetto parametrico, a differenti scale, di ponti tensegrity, dimensionati in accordo ad algoritmi iterativi di minima massa. Le variabili di progetto esaminate consistono in due diversi parametri di complessità strutturale e due parametri angolari, che governano rispettivamente la topologia e la geometria della struttura da ponte considerata. La procedura iterativa recentemente proposta in [15] viene impiegata per determinare la configurazione di massa minima della struttura da ponte analizzata, sotto assegnati vincoli di snervamento e/o instabilità delle aste (carico critico). Tale procedura viene ripetuta per diversi valori delle variabili di progetto, al fine di pervenire a progettazioni ottimali di tipo “globale”. I risultati presentati conducono ad osservare che la topologia di minima massa del ponte tensegrity esibisce due scale strutturali caratteristiche (una al discreto ed una al continuo), in corrispondenza dei due diversi parametri di complessità strutturale presi in esame.

2 MODELLO DI PONTE TENSEGRITY

In un noto lavoro del 1904, A.G.M. Michell esaminò il problema di ricerca di forma di una struttura reticolare di volume minimo i cui elementi, costituiti da uno stesso materiale omogeneo, sono sollecitati alla tensione limite di snervamento [8]. In uno degli esempi presentati in questo lavoro, Michell considerò una struttura costituita da una porzione di circonferenza, DE, centrata in C; due segmenti uguali DA ed EB che giacciono lungo le tangenti in D ed E all’arco DE, con A, B e C allineati; un certo numero di raggi che dividono il settore circolare CDE in parti uguali (Fig. 1). A questa struttura si può far corrispondere lo schema statico di una trave orizzontale, incernierata agli estremi A e B, caricata centralmente da una forza F applicata in C, perpendicolare al segmento AB e diretta verso il basso.

Nella Fig. 1 gli elementi in compressione, i puntoni, sono rappresentati da linee nere, mentre

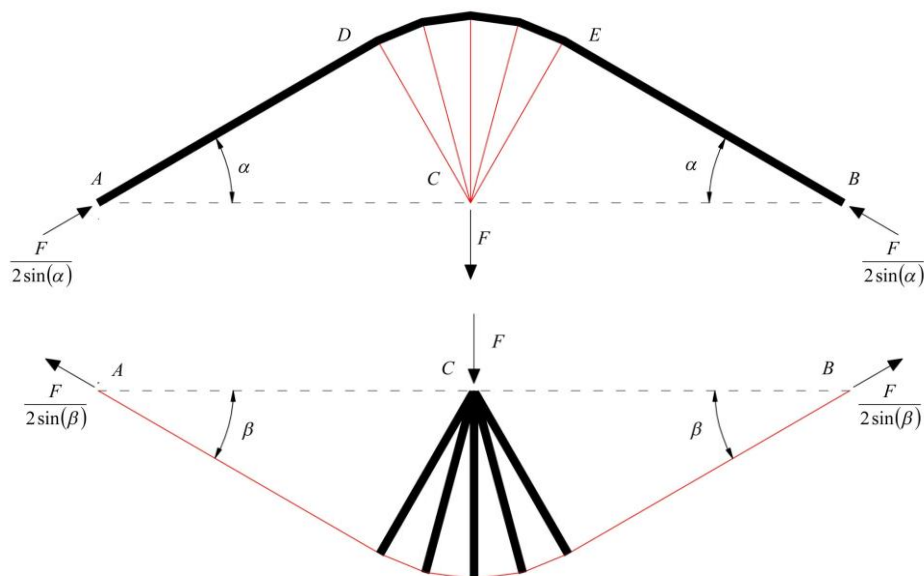


Fig. 1: Struttura di Michell per una trave caricata centralmente

gli elementi in trazione, i tiranti, sono rappresentati da linee rosse più sottili. Per maggiori dettagli sugli aspetti matematici del problema si può far riferimento a [2]. Questa topologia può essere considerata in due versioni, l’una simmetrica dell’altra, collocate o al di sopra o al di sotto del segmento AB, con la differenza che, nel primo caso (Fig. 1, sopra), gli elementi dell’arco ADEB (nel seguito chiamato arco di Michell) sono puntoni e i raggi convergenti in C sono tiranti, mentre nel secondo caso (Fig. 1, sotto), gli elementi dell’arco di Michell sono

tiranti e i raggi puntoni. Dalla Fig. 1 si può notare che l'angolo centrale del settore circolare CDE cresce sempre più man mano che l'angolo α (o β) si avvicina al valore di 90 gradi.

Il modello parametrico di ponte tensegrity qui considerato è ottenuto attraverso n suddivisioni ripetitive di un modulo base formato da un singolo arco di Michell che è formato da p raggi posizionati al di sopra dell'impalcato e due archi con un numero $q = p$ di raggi posizionati al di sotto dell'impalcato. Tale ponte è vincolato con una cerniera fissa ad una estremità dell'impalcato ed un carrello all'altra estremità. In Fig. 2 viene esposto il modulo base corrispondente ad $n = p = 1$. In tale elemento gli angoli α e β possono assumere valori arbitrari, e gli elementi orizzontali al livello dell'impalcato (rappresentati con linee in blu in Fig. 2) possono fungere sia da puntoni che da tiranti (elementi bidirezionali, [15]). Tali elementi forniscono le componenti orizzontali delle forze laterali dell'arco di Michell (Fig. 1). L'elemento di base mostrato in Fig. 2 esibisce un singolo arco compresso al di sopra dell'impalcato, due cavi in trazione al di sotto ed una suddivisione dell'impalcato in quattro elementi di uguale lunghezza. Da qui in poi, si denoterà con f la forza totale trasferita dall'impalcato alla struttura del ponte.

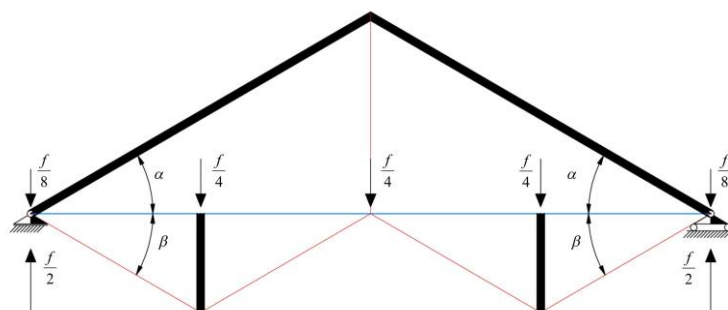


Fig. 2: Modulo base del ponte tensegrity

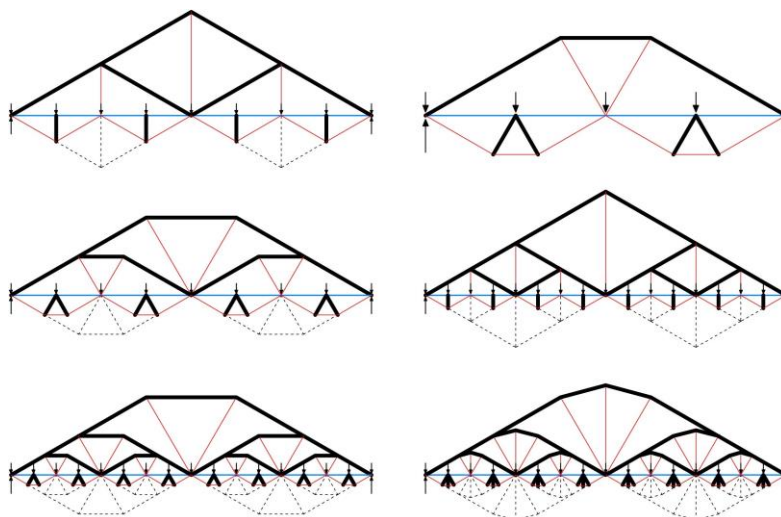


Fig. 3: Geometrie del ponte tensegrity per diversi valori dei parametri di complessità n e $p = q$

Forme più complesse corrispondenti a più elevati valori di n e p , mantenendo gli stessi angoli α e β , sono mostrate in Fig. 3. Per $n > 1$, si assume che gli elementi degli archi nidificati posizionati al di sopra dell'impalcato possono sovrapporsi tra loro. Inoltre, si trascurano gli elementi esterni degli archi al di sotto dell'impalcato (indicati da linee punteggiate in Fig. 3), con lo scopo di minimizzare il volume di materiale posizionato in questa porzione della struttura da ponte. È facile notare che la geometria corrispondente ad un numero arbitrario di n suddivisioni dell'elemento base produce 2^{n+1} elementi al livello dell'impalcato, e delle forze nodali uguali a $f/(2^{n+1})$ in corrispondenza con i nodi intermedi posizionati sull'impalcato.

Si ricerca, quindi, il valore ottimale dei parametri di complessità n , p e q e degli angoli di aspetto α e β , i quali minimizzano la massa del ponte sotto i vincoli di snervamento e instabilità. Come anticipato, si prescrive $q = p$ e si assume, per semplicità di calcolo, che tutti i tiranti e i puntoni siano costituiti dallo stesso materiale. Si noti che la rimozione di tali vincoli non sarebbe un problema in teoria, ma porterebbe a un numero eccessivo di variabili di ottimizzazione.

3 ALGORITMO DI MINIMIZZAZIONE DELLA MASSA

Si affronta il progetto di minima massa del ponte frattale presentato nella Sezione 2 attraverso una procedura iterativa di programmazione lineare presentata in [15].

Data la luce del ponte L , il carico totale sull'impalcato f ed i valori arbitrari ma fissati delle variabili di progetto α , β , n e p , si determinano la minima massa del ponte m ed i valori ottimali delle densità di forza risolvendo iterativamente il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} &\text{minimizzare} && m = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sotto i vincoli:} && \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Nella (1), \mathbf{x} è il vettore che contiene gli sforzi normali di tutti gli elementi, \mathbf{c} è un vettore costante che dipende da: le lunghezze degli elementi, la densità di massa del materiale e le tensioni limite assegnate a ciascun elemento. Il primo vincolo nella (1) è dato dalle equazioni di equilibrio, con \mathbf{A} l'operatore di equilibrio e \mathbf{w} il vettore dei carichi. Il secondo vincolo esprime il fatto che tiranti e puntoni devono trovarsi rispettivamente in trazione e compressione. Inizialmente si impone che la tensione limite nelle barre sia pari a quella di snervamento del materiale. Una volta individuata la soluzione di (1) (primo passo), si assegna a ciascuna barra, considerata di sezione circolare, l'area della sezione per cui lo sforzo normale ottenuto è uguale al carico di instabilità calcolato secondo la formula di Eulero. A questo punto, se la massa complessiva conseguente a questa assegnazione è superiore alla massa m ottenuta dalla soluzione di (1), a meno di una certa tolleranza, si aggiorna la tensione limite di ciascuna barra a quella euleriana, risolvendo un nuovo problema (1) (passo successivo). Se invece questo non succede, si arresta la procedura. Si faccia riferimento a [18] per una descrizione esaustiva di questa procedura.

Si noti che il contributo a \mathbf{w} dovuto al peso proprio della struttura da ponte viene qui trascurato, assumendo che il peso complessivo del ponte sia molto minore del carico sull'impalcato. Se le forze di gravità sono presenti, si può procedere come descritto in [15].

Un progetto al solo snervamento delle membrature del ponte è ottenuto arrestando la procedura alla prima iterazione. Tale caso corrisponde all'approccio seguito da Michell nel suo studio di una trave caricata centralmente. Nel prosieguo, si utilizzerà l'indice Y per indicare la massa e le variabili di progetto corrispondenti a tale strategia.

4 RISULTATI DELLA PROCEDURA DI MINIMIZZAZIONE DELLA MASSA

Si utilizzano i simboli μ^* , α^* e β^* per indicare, rispettivamente, la massa minima e gli angoli ottimali del ponte tensegrity sotto vincoli combinati di snervamento e instabilità. I simboli μ_y^* , α_y^* e β_y^* indicano invece i valori ottimali delle stesse quantità sotto il solo vincolo di snervamento. In tutti gli esempi esaminati, si ricerca la massa minima del ponte, eseguendo la procedura di ottimizzazione presentata nella Sezione 3, cosicché i parametri di progetto n , p , α e β possano variare nel dominio prescritto. Si impostano incrementi di n e p pari all'unità ed incrementi di α e β pari a 0.01 gradi. In aggiunta, si impostano L , f e ρ pari all'unità e si assume, in dimensioni astratte: $\bar{\sigma}_y = 6.9 \times 10^8 L^2/f$; $E = 2.1 \times 10^{11} L^2/f$. È facile osservare che il modulo base mostrato in Fig. 2 può essere in equilibrio sia in presenza degli elementi posi-

zionati al livello dell'impalcato, sia in assenza di essi (elementi blu in Fig. 2). Si ricorda che gli elementi posizionati al livello dell'impalcato possono fungere sia da tiranti che da puntoni (anche questo tipo di elementi viene trattato in [15]).

4.1 Progetto per $n = 1$, e p , α e β variabili

In questo caso n è mantenuto costante e pari a 1, con α , β e p variabili nei seguenti intervalli:

$$p \in [1,60], \quad \alpha \in (0,90)\text{gradi} \quad \beta \in (0,90)\text{gradi} \quad (2)$$

La Tabella 1 mostra i risultati dell'ottimizzazione ottenuti. Sotto il solo vincolo di snervamento, la massa del ponte converge ad un minimo globale quando $p \rightarrow \infty$ ($\mu^* \rightarrow 0.985$, v. Tabella 1). Invece, gli angoli di aspetto α e β convergono ai seguenti valori limite: $\alpha^* \rightarrow 53.42$ gradi e $\beta^* \rightarrow 33.97$ gradi. Le configurazioni di minima massa sotto vincoli combinati di instabilità e snervamento mostrano rapporti d'aspetto simili tra loro e masse molto maggiori se confrontati con quelle corrispondenti al solo snervamento.

Tabella 1: Alcuni dei risultati per il caso $n = 1$, $\alpha \in (0,90)\text{gradi}$, $\beta \in (0,90)\text{gradi}$ e $p \in [1,60]$.

p	α^*	β^*	μ^*	α^*	β^*	μ^*
1	41.83	24.11	1.118	26.11	13.77	808.84
3	50.29	31.05	1.0235	42.78	24.83	446.26
5	53.42	33.97	0.9952	50.29	31.05	375.84
10	54.42	34.96	0.9871	53.42	33.97	338.3
15	54.58	35.11	0.9859	53.13	33.69	341.67
20	54.65	35.18	0.9855	51.98	32.6	352.24
25	54.68	35.21	0.9854	74.39	22.29	375.03
30	54.7	35.23	0.9853	76.17	21.15	372.02
40	54.72	35.25	0.9852	78.37	19.6	369.85
50	54.72	35.25	0.9852	79.69	18.54	370.17

4.2 Progetto con n , p , α e β variabili

In questo caso si assume che tutte le variabili di progetto n , p , α e β possano simultaneamente variare nei seguenti intervalli:

$$n \in [2,5] \quad p \in [1,7] \quad \alpha \in (0,90)\text{gradi} \quad \beta \in (0,90)\text{gradi} \quad (3)$$

I risultati in Tab. 2 evidenziano che il minimo globale nel dominio (3), sotto vincoli combinati di snervamento e di instabilità, si ottiene per $n = 2$, $p = 7$, con $\mu^* = 333.17$, $\alpha^* = 62.52\text{gradi}$, e $\beta^* = 17.77\text{gradi}$. In particolare, la massa di tale configurazione è leggermente inferiore al minimo globale della massa ottenuto nel caso precedente (Sezione 4.1) per $n = 1$ e $p = 11$, pari a $\mu^* = 337.69$ (non mostrato nella Tabella 1). Con riferimento al caso con $n = 2$, per individuare se il minimo globale è ottenuto per un valore di p finito oppure no, si è fatto crescere tale parametro fino a $p = 13$, determinando la massa minima corrispondente (oltre tale valore di p , i tempi di calcolo crescono eccessivamente). Si è trovato che la massa del ponte decresce in modo monotono quando p cresce da 1 a 13. In particolare, la configurazione di minima massa relativa a $n = 2$ e $p = 13$ è la seguente: $\mu^* = 225.98$, $\alpha^* = 69.45\text{gradi}$, $\beta^* = 23.97\text{gradi}$. Tali risultati, insieme con quelli presentati in Tab. 2, indicano che il mini-

mo globale della configurazione di minima massa del ponte può essere raggiunto per valori piuttosto grandi di p o, al limite, per $p \rightarrow \infty$, quando $n \geq 2$.

Nel caso di soli vincoli di snervamento, si osserva che tale configurazione è raggiunta per $n = 2$ e $p = 7$ (v. Tab. 2) e che la corrispondente massa è maggiore del minimo globale ottenuto nella Sezione 4.1 per $n = 1$ e $p \rightarrow \infty$ ($\mu_Y^* \rightarrow 0.985$). Dalla Tab. 2 si vede anche che, in ogni caso esaminato, il valore ottimale di α cresce in modo molto lento con n , mentre cresce in modo più marcato al crescere di p . I valori ottimali di β , invece, decrescono marcatamente con n e crescono significativamente con p . È facile notare che le due strategie esaminate di progetto (solo vincoli di snervamento e vincoli combinati di snervamento ed instabilità delle aste) portano ad angoli diversi del ponte per $p = 1$ e, al contrario, portano a più simili geometrie al crescere di p , per ogni n . I risultati sottolineano che, al crescere del parametro di complessità n , si hanno valori crescenti di α e valori di β considerevolmente piccoli. Si desidera sottolineare, comunque, che la configurazione di minima massa è raggiunta per $n = 2$ sotto il solo vincolo di snervamento delle aste ed $n = 2$ sotto i vincoli combinati di snervamento e di instabilità delle aste.

Tabella 2: Alcuni dei risultati per il caso $n \in [2,5]$, $p \in [1,7]$, $\alpha \in (0,90)$ gradi e $\beta \in (0,90)$ gradi

n	p	α_Y^*	β_Y^*	μ_Y^*	α^*	β^*	μ^*
2	1	44.62	9.34	1.5207	26.58	4.77	1086.23
2	3	57.81	14.83	1.3329	45.20	9.53	558.02
2	5	63.73	18.66	1.2674	56.10	13.93	413.11
2	7	66.42	20.90	1.2534	62.52	17.77	333.17
3	1	44.96	4.08	1.7545	26.58	2.05	1186.33
3	3	59.52	6.92	1.5232	45.31	4.13	607.67
3	5	69.56	10.85	1.4341	56.63	6.19	446.2
3	7	72.52	12.78	1.4137	63.71	8.23	354.03
4	1	44.96	1.91	1.8761	26.58	1.03	1221.82
4	3	59.73	3.27	1.6256	45.31	1.93	625.75
4	5	71.41	5.66	1.5262	56.65	2.90	459.24
4	7	75.51	7.35	1.5021	63.82	3.88	363.95
5	1	45.01	0.93	1.9378	26.58	0.75	1234.39
5	3	59.92	1.60	1.6784	45.32	1.44	632.19
5	5	71.84	2.83	1.5747	56.65	1.71	463.95
5	7	76.80	3.96	1.5489	63.83	1.88	367.65

4.3 Progetto di minima massa per $n = 5$, $\alpha = 40$ gradi, $\beta = 60$ gradi e p variabile

Un progetto rigoroso di minima massa di un ponte tensegrity porterebbe a forme piuttosto disordinate ed a sovrapposizioni di alcuni elementi. Inoltre, i progettisti di ponti generalmente preferiscono orientare il loro design concettuale richiedendo che il ponte rispetti assegnati rapporti d'aspetto, e/o assegnate topologie e forme. Perciò, si può considerare un progetto di minima massa che mantiene fissati la maggior parte dei parametri di progetto, lasciandone solo uno libero di variare nei limiti prescritti. La Tabella 3 e la Figura 4 mostrano i risultati di un progetto di minima massa che mantiene $n = 5$, $\alpha = 40$ gradi e $\beta = 60$ gradi, e lascia la complessità p libera di variare nell'intervallo $[1, 50]$.

I risultati in Tabella 3 evidenziano che la massa del ponte decresce in modo monotono con p nel presente dominio di ricerca, sia sotto il solo vincolo di snervamento che sotto vincoli

combinati di snervamento ed instabilità. Il minimo globale della massa è raggiunto per valori molto grandi di p , al limite per $p \rightarrow \infty$.

Tabella 3: Risultati per $n = 5$, $\alpha = 40$ gradi, $\beta = 60$ gradi e $p \in [1, 50]$

p	1	3	7	10	15	20	25	30	40	50
μ_Y^*	2.0261	1.8545	1.8504	1.8486	1.8478	1.8475	1.8474	1.8473	1.8473	1.8472
μ^*	1419.43	569.55	542.624	524.96	512.81	507.41	504.507	502.79	501.03	500.33

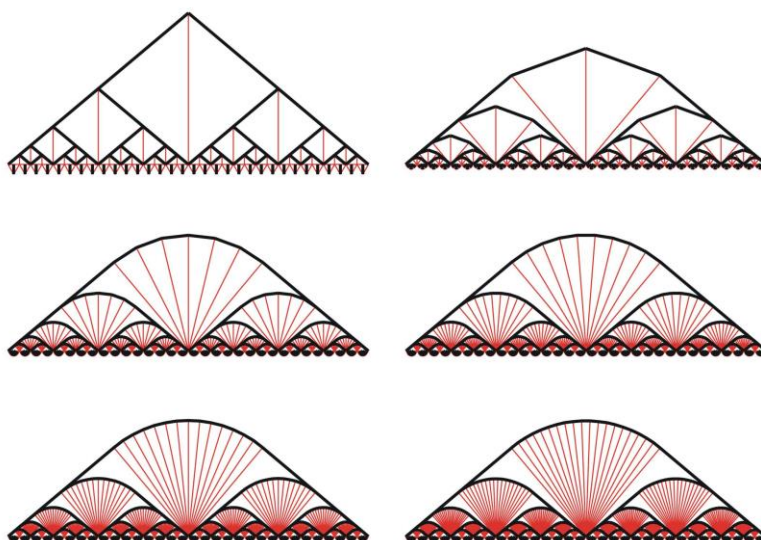


Fig. 4: Topologie del ponte per alcuni valori di p , con $n = 5$, $\alpha = 40$ gradi e $\beta = 60$ gradi.

5 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

È stato presentato un metodo di progetto per ponti tensegrity, che si fonda sulla generazione di forme di minima massa attraverso ripetizioni *self-similar* di travature di Michell soggette a carico centrale [1,8,16]. La procedura proposta utilizza due distinti parametri di complessità strutturale, n e p , e due parametri di forma angolari, α e β , e tiene conto di vincoli di progetto di snervamento e di instabilità. I risultati presentati nella Sezione 4 evidenziano che la configurazione di ottimo globale del modello di ponte esaminato mostra una complessità p marcatamente grande ed, al contrario, una complessità n molto piccola ($n=1$ sotto vincoli di snervamento semplice; $n=2$ sotto vincoli combinati di snervamento e di instabilità). Si può quindi concludere che tale ponte esibisce complessità strutturale di tipo multi-scala. In tutti gli esempi esaminati, si è osservato che la massa minima del ponte sotto vincoli semplici di snervamento è circa di due ordini di grandezza più piccola di quella corrispondente a vincoli combinati di instabilità e snervamento. Si affida a studi futuri la realizzazione di modelli fisici in scala reale o ridotta di ponti tensegrity, nonché la generalizzazione a strutture 3D dell'approccio qui proposto. Ulteriori generalizzazioni del presente studio potranno riguardare l'utilizzo di diverse funzioni obiettivo, l'adozione di strategie evolutive di ottimizzazione per la ricerca di forma [5,7,18], nonché modelli computazionali alle tensioni concentrate [3,4].

RINGRAZIAMENTI

FF, GC e RS ringraziano la Provincia di Avellino per il supporto finanziario ricevuto nell'ambito del progetto "Sistemi Innovativi per la protezione da eventi sismici ed il monitoraggio strutturale".

BIBLIOGRAFIA

- [1] Baker, W. F., Beghini, L. L., Mazurek, A., Carrion, J., Beghini, A., Maxwell's reciprocal diagrams, and discrete Michell frames, *Struct Multidisc Optim.*, Online first, DOI 10.1007/s00158-013-0910-0, 2013
- [2] Bouchittè, G., Gangbo, W., Seppecher, P., Michell trusses and lines of principal action, *Math. Mod. Meth. Appl. S.*, 18,1571–1603, 2008
- [3] Fraternali, F., Angelillo, M., Fortunato, A., A lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation, *Int. J. Solids Struct.*, 39,6211–6240, 2002
- [4] Fraternali, F., Carpentieri, G., Continuum limits of 2D force networks associated with discrete systems and tensegrity structures, *In press*, 2013
- [5] Fraternali, F., Marino, A., El Sayed, T., Della Cioppa, A., On the Structural Shape Optimization through Variational Methods and Evolutionary Algorithms, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 18,224–243, 2011
- [6] Fraternali, F., Senatore, L., Daraio, C., Solitary waves on tensegrity lattices, *J. Mech. Phys. Solids*, 60,1137–1144, 2012
- [7] Koohestani, K., Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm, *Int. J. Solids Struct.*, 49,739–747, 2012
- [8] Michell, A.G.M., The limits of economy of material in frame-structures, *Philos. Mag.*, 8,589–597, 1904
- [9] Nagase, K., Skelton, R. E., Minimal mass tensegrity structures, *In press*, 2013
- [10] Rhode-Barbarigos, L., Jain, H., Kripakaran, P., Smith, I. F. C., Design of tensegrity structures using parametric analysis and stochastic search. *Eng. Comput.*, 26(2),193–203, 2010
- [11] Sakamoto, T., Ferrè, A., Kubo, M. (Eds.), From Control to Design: Parametric/Algorithmic Architecture, *Actar*, 2008
- [12] Skelton, R. E., Structural systems: a marriage of structural engineering and system science. *J. Struct. Control*, 9,113–133, 2002
- [13] Skelton, R. E., de Oliveira, M. C., Optimal tensegrity structures in bending: the discrete Michell truss, *J. Franklin I.*, 347,257–283, 2010
- [14] Skelton, R. E., de Oliveira, M. C., Tensegrity Systems, *Springer*, 2010
- [15] Skelton, R. E., Nagase, K., Tensile tensegrity structures, *Int. J. Space Struct.*, 27,131–137, 2012
- [16] Sokóf, T., Rozvany, G.I.N., New analytical benchmarks for topology optimization and their implications. Part I: bi-symmetric trusses with two point loads between supports, *Struct. Multidisc. Optim.*, 46,477–486, 2012
- [17] Tibert, A.G., Pellegrino, S., Review of form-finding methods for tensegrity structures, *Int. J. Space Struct.*, 18,209–223, 2011
- [18] Yamamoto, M., Gan, B. S., Fujita, K., Kurokawa, J., A genetic algorithm based form-finding for tensegrity structure, *Procedia Engineering*, 14,2949–2956, 2011

PAROLE CHIAVE

Strutture tensegrity, ricerca della forma, massa minima, ponti, progetto parametrico, complessità multi-scala.